Code épreuve : 287 **Nombre de pages :** 29 **Session :** 2025

Épreuve de : Mathématiques 2 Appliquées ESSEC BS

Partie 1 :

1) Soit, $h : t \to e^t - 1 - t$. et h définie sur $\mathbb{R}$.

h derivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions l'étant.
Donc,
$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h'(t) = e^t - 1$

Ainsi, $h'(t) \leq 0$
$\iff e^t \leq 1$
$\iff t \leq 0$ car la fonction ln est bijective croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$
$\iff t \leq 0.$

et, donc $\forall t \in \mathbb{R}, \quad h'(t) \geq 0$
$\iff e^t \geq 1$
$\iff t \geq 0$ par bijectivité croissante de ln sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Donc h admet un minimum en 0 car decroissante sur $]-\infty, 0[$ et croissante sur $[0, +\infty[$.

Donc comme $h(0) = e^0 - 1 - 0 = 0$ alors,

$\forall t \in \mathbb{R} \quad h(t) \geq 0$ donc $e^t \geq 1 + t$

De même, Soit, $g(t) = t - \ln(1+t)$ et $t > -1$.

g dérivable sur $]-1, +\infty[$ comme somme et composée de fonctions l'étant,

$\forall t \in]-1, +\infty[$, $g'(t) = 1 - \frac{1}{1+t}$.

Ainsi,

$$g'(t) > 0$$
$$\Leftrightarrow 1 > \frac{1}{1+t}$$
$$\Leftrightarrow 1+t > 1 \quad (1+t > 0) \text{ car } t > -1$$
$$\Leftrightarrow t > 0$$

donc g croissante sur $]0, +\infty[$

et, $g'(t) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{1}{1+t}$

$$\Leftrightarrow 1+t \leq 1$$
$$\Leftrightarrow t \leq 0.$$

donc g décroissante sur $]-1, 0]$

Donc g admet un minimum en 0, $g(0) = 0 - \ln(1)$
$= 0$.

Donc, $\forall t > -1$, $g(t) \geq 0$

$\Leftrightarrow t \geq \ln(1+t)$ et $\forall t > -1$

2) Soit f définie sur $[0,1]$.

2a) f dérivable sur $[0,1]$ comme produit de fonctions usuelles et composées dérivables sur $[0,1]$.

$\forall t \in [0,1]$,

$f'(t) = 1.e^{-t} + (1+t)(-1)e^{-t} - 1$

$f'(t) = e^{-t} + e^{-t}(-1-t) - 1$

$f'(t) = e^{-t}(-t) - 1$

Ainsi $f'(t) \geq 0 \iff -te^{-t} \geqslant 1$ ce qui est impossible car $t \geq 0$ et $e^{-t} > 0$.

$f'(t) < 0 \iff -te^{-t} < 1$

Or, c'est vrai car $t \geqslant 0$ et $e^{-t} > 0$. donc $-te^{-t} < 1$.

Donc, f strictement décroissante sur $[0,1]$

Soit $\alpha \in]0,1[$.

f continue sur $[0,1]$ car dérivable.
f strictement décroissante sur $[0,1]$.

et, $f(1) = 2e^{-2} - 2$ et $f(0) = \cancel{0}\,1$

Or, $2e^{-2} < 2$ car $e^{-2} \in]0,1[$ donc, $2e^{-2} - 2 < 0$

$0 \in [f(1), f(0)]$.

Par le théorème de la bijection, $\exists!\, \alpha \in]0,1[\,/ f(\alpha) = 0$.

De plus,

$f(t) > 0$

$\iff f(t) > f(\alpha)$.

En composant par f^{-1}, comme f bijection décroissante

Sur $[0,1]$,

$\Leftrightarrow t < \alpha$.

2b) On pourra penser au modèle de la dichotomie :

```
a=0
b=1
while (a+b)/2 > 10**(-3):
    a= (1+a)*np.exp(-a) - a
    b= (1+b)*np.exp(-b) - b.
    if (a-b) > 0:
        a= (a-b)/2
    else:
        b= (b-a)/2      -> return (a+b/2)
```

2c) Par étude de fonctions, soit,

$w(t) = -e^t + 1 + 2t$. et $D_w = [0,1]$

w dérivable sur $[0,1]$ comme somme et composée de fonctions usuelles l'étant.

$\forall t \in [0,1]$, $w'(t) = -e^t + 2$.

Ainsi, $w'(t) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq e^t$
$\Leftrightarrow \ln(2) \geq t$ ($\ln$ bijection croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$)

et donc w croissante sur $[0, \ln(2)]$

et $w'(t) < 0 \Leftrightarrow 2 < e^t$
$\Leftrightarrow \ln(2) < t$. ($\ln$ bijection croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$)

donc w décroissante sur $]\ln(2), 1]$.

Copie anonyme - n°anonymat : 800252

Code épreuve : 287	**Nombre de pages :** 32	**Session :** 2025

Épreuve de : Mathématiques 2 Appliquées ESSEC BS

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

On, $\underline{w(1) = -e + 2 + 1 = 3 - e}$ or $e \simeq 2{,}6$ donc $w(1) \geq 0$

$\underline{w(0) = -1 + 1 = 0}$

Donc $w(0)$ minimum de w.

Ainsi, $\forall t \in [0, 1]$ $w(t) \geq 0$

$\underline{\iff 2t + 1 \geq e^t}$

2c)

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3) Soit, $U \hookrightarrow U_{[0,1[}$.

a)
```
def minimum (x, p):
    i = 0
    j = 0
    while i < x :
        i = i + (p**j / np.cumprod (j)) * np.exp (-p)
        j = j + 1
    return (j)
```

b) $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

De plus $\forall \omega$, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$P(Y=k) = P\left(U \leq \sum_{i=0}^{k} \frac{p^i}{i!} e^{-p}\right)$$

$=$

<u>on admet</u>

3c) Soit $k \geq 2$

Supposons $[Y=k]$ réalisé.

On a $[Y=k] \Rightarrow [X=0]$ donc $[Y=k] \subset [X=0]$.

donc, $\forall k \geq 2$, $P([X=0] \cap [Y=k]) = P(Y=k)$ car inclusion

$= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ car $Y \hookrightarrow P(\lambda)$

~~3d)~~ 3d). $X(\Omega) = \{0, 1\}$.

donc, comme $P([X=0] \cap [Y=1]) = \emptyset$ on a,

$P([X=1] \cap [Y=1]) = P(Y=1) = \lambda e^{-\lambda}$

de plus, $[X=0] \cap [Y=1] = ([(U \leq \beta) \cup (U > \beta+\lambda)] \cap (Y=1)])$

Je n'aboutis pas.

. ~~$P([X=0]\cap[Y=0]) = P([\beta < U \leq \beta+\gamma]$~~

$P([X=0]\cap[Y=0]) = P(([U\leq\beta]\cup[U>\beta+\gamma])\cap[Y=0])$

Or, $[Y=0]$ et $[U>\beta+\gamma]$ sont incompatibles car $\gamma>0$ donc,

$= P([U\leq\beta]\cap[Y=0])$. Or, $[Y=0]\supset[U\leq\beta]$ car le minimum de β et α donc

$= P(U\leq\beta) = \beta.$

. $P([X=1]\cap[Y=0])$
$= P([\beta\leq U\leq\beta+\beta]\cap[Y=0])$. On admet.

3e) Avec le SCE $([Y=k])_{k\in\mathbb{N}}$ on applique la formule des probabilités totales

~~$P(X\neq Y) = P([X=0]\cap[Y=1]) + P([X=1]\cap[Y=0]) + (1-P([X=1]\cap[Y=1])) + (1-P([X=0]\cap[Y=0])$~~
~~$= \gamma - \gamma e^{-\gamma} + 1 - \gamma e^{-\gamma} + 1+\gamma - (1+\gamma)e^{-\gamma} =$ J'aboutis pas~~

4) Soit $k\in\mathbb{N}^*$, $B_1 \dots B_k$ des événements,

$$T = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{B_i}$$

a) On sait que $\forall i\in[\![1,k]\!]$, $\mathbb{1}_{B_i} = 1$ si B_i réalisé
$\mathbb{1}_{B_i} = 0$ sinon.

De fait, pour que T soit supérieur ou égale à 1, il suffit que au moins 1 seul événement $(B_i)_{i\in[\![1,k]\!]}$ soit réalisé.

Donc, $P(T\geq 1) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right)$

Copie anonyme - n°anonymat : 800252

Code épreuve : 287	Nombre de pages : 29	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques 2 Appliquées ESSEC BS

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

4b) Recurrence.

Si $k=1$, alors d'une part, on a $P\left(\bigcup_{i=1}^{1} B_i\right) = P(B_1)$

et d'autre part, $\sum_{i=1}^{1} P(B_i) = P(B_1)$

Donc initialisé

De plus, soit k quelconque fixé tel que,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} P(B_i)$$

On étudie,

$P\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i\right) = P\left(\left[\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right] \cup B_{k+1}\right)$. Par le crible de Poincaré,

$$= \sum_{i=1}^{k+1} P(B_i) - P\left(\left[\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right] \cap B_{k+1}\right).$$

Or, $P\left(\left[\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right] \cap B_{k+1}\right) \geq 0$ comme probabilité.

Ainsi, il vient,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k+1} P(B_i)$$

Donc par récurrence,

$\forall k \geq 1$,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} P(B_i)$$

5)

a) On a, par l'inégalité triangulaire, $\forall k \in \mathbb{N}$

$$|P(X=k) - P(Y=k)| \leq |P(X=k)| + |-P(Y=k)|$$

$$\Rightarrow |P(X=k) - P(Y=k)| \leq |P(X=k)| + |P(Y=k)|$$

On $\sum_{k=0}^{+\infty} |P(X=k)| + |P(Y=k)| = \sum_{k=0}^{+\infty} |P(X=k)| + \sum_{k=0}^{+\infty} |P(Y=k)|$

donc converge.

Ainsi, par critère de comparaison sur des séries à termes positifs, $\delta(X,Y)$ converge.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$, tel que $P(X=k) \geq P(Y=k)$

c) $\forall k \in \mathbb{N}$ tel que $P(X=k) \geq P(Y=k)$ on a la Jb

$P(\cancel{X=k} \cancel{\geq} \cancel{P(Y=k)})$.

On X et Y ne sont pas spécifiquement définies et donc par symétrie de leurs rôles on a bien

$\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\underline{|P(X=k) - P(Y=k)| \leq P([X=k] \cap [Y \neq k]) + P([X \neq k] \cap [Y=k])}$$

5d) On avec le système complet d'événements $([X=k])_{k \in \mathbb{N}}$, et la formule des probabilités totales

$$P(X \neq Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([X=k] \cap [Y \neq k])$$

et avec le système complet $([Y=k])_{k \in \mathbb{N}}$, et la formule des probabilités totales

$$P(X \neq Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([X \neq k] \cap [Y=k]).$$

Donc en sommant car la convergence est assurée (probabilités)

$$\Rightarrow \delta(X,Y) \leq 2d(X,Y) \leq 2.$$

C'est inférieur ou égal à 2 car une $P(X \neq Y)$ probabilité donc

$$P(X \neq Y) + P(X \neq Y) \leq 2.$$

Partie 2 :

6)

7)

On a, $X_1 \dots X_n$ telles que,

$\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\quad X_i = \mathbb{1}_{[p < U_i \leq p + p_i]}$.

On a, $Y_1, \dots Y_n$ telles que, $\forall j \in [\![1, n]\!]$

$$Y_j = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \,/\, U_j(w) \leq \sum_{i=0}^{k} \frac{r^i}{i!} e^{-r} \right\}.$$

Donc comme les $(U_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendantes, alors les variables $X_1, \dots X_n$ et $Y_1 \dots Y_n$ sont indépendantes par

Copie anonyme - n°anonymat : 800252

Code épreuve : 288	Nombre de pages : 29	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques 2 Appliquées ESSEC BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

lemme des coalitions. (pas de variables communes)

8) T_n est une somme de loi de Poisson indépendantes de paramètres respectifs $p_1, \dots p_n$.

Donc $T_n \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)$ où $\sum_{i=1}^{n} p_i > 0$.

De plus, si les p_k valent tous $\frac{\lambda}{n}$ alors les X_k ont la même loi.

On $\forall A$, $\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathcal{B}(P(A))$.

Donc S_n est une somme de Bernoulli indépendantes et donc comme elles sont de mêmes paramètres,

$S_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.

Ainsi comme d'après la loi faible des grands nombres,

$S_n \xrightarrow{\mathcal{L}} n\frac{\lambda}{n}$ donc $S_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$.

9) a) $S_n \neq T_n$ signifie que la somme des X_k et celle des Y_k sont distinctes.

De ce fait, cela implique que l'union des

$[X_k \neq Y_k]$ est réalisé ~~dans~~, en effet, X_k somme de 1 ou de 0 NON ABOUTI

$$[S_n \neq T_n] \subset [X_k \neq Y_k]$$

b) D'après 5d,

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, comme S_n et T_n à valeurs dans $\mathbb{N}$,

$$\delta(S_n, T_n) \leq 2P(S_n \neq T_n)$$ J'aboutis pas

10) D'après la 9b, comme $S_n \hookrightarrow B(n, \frac{\lambda}{n})$ et $T_n \hookrightarrow P(\lambda)$ alors, par la 9b, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\delta(S_n, T_n) \leq 4 \sum_{k=1}^{n} p_k^2 \left(\frac{\lambda}{n}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \left| \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} - \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right| \leq 4n \cdot \frac{\lambda^2}{n^2}$$

(puisque n termes)

Donc,

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ si $p_k = \frac{1}{n}$ pour tout k

$$\sum_{k=0}^{n} \left| \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} - \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right| \leqslant \frac{h\lambda^2}{n}$$

11) Soit n et $n \geqslant 2$.

a)

b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. et $t \in$

$$t \leqslant k$$

$\Rightarrow n+t \leqslant n+k$. Or la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc,

$\Rightarrow \frac{1}{n+k} \leqslant \frac{1}{n+t}$. Comme ces fonctions sont continues sur $[k-1, k+1]$ on a,

$\Rightarrow \frac{1}{n+k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{n+t} \, dt$.

or, $< t$

c) ~~En sommant et par Chasles, on a, avec $n \geqslant 2$,~~

$$\cancel{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+t}}$$

$$\cancel{\sum_{k=1}^{n+1} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{n+t}\,dt \leq S_n \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{n+t}\,dt}$$

$$\cancel{\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \left[\ln(k+1+n) - \ln(k+n) \right.}$$

On Somme de 1 à n,

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{n+t}\,dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{n+t}\,dt.$$

$$\cancel{\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \ln(n+k+1) - \ln(n+k) \leq S_n \leq \ln(n+}$$

$$\Rightarrow \int_{1}^{n+1} \frac{1}{n+t}\,dt \leq S_n \leq \int_{0}^{n} \frac{1}{n+t}\,dt$$

$$\Rightarrow \ln(2n+1) - \ln(n+1) \leq S_n \leq \ln(2n) - \ln(n)$$

$$\Rightarrow \ln(2n+1) - \ln(n+1) \leq S_n \leq \ln(2) + \ln(n) - \ln(n)$$

car $n > 0$, $2 > 0$

Donc,

$$\Rightarrow \ln(2n+2-1) - \ln(n+1) \leq S_n \leq \ln(2).$$

$$\cancel{\Rightarrow \ln(2(n+1) - \frac{1}{}}$$

$$\Rightarrow \ln\left((2n+2)\left(1 - \frac{1}{2n+2}\right)\right) - \ln(n+1) \leq S_n \leq \ln(2)$$

$$\Rightarrow \cancel{\ln(2n+2)}\ \cancel{+}\ \ln(2) + \ln\left(1 - \frac{1}{2n+2}\right) \leq S_n \leq \ln(2)$$

Par théorème encadrements $\lim_{+\infty} S_n = \ln(2)$ car $\lim_{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{2n+2}\right) = 0$

d) $(S_n)(\Omega) = \mathbb{N}$ car la variable compte des succès.

Copie anonyme - n°anonymat : 800252

Code épreuve : 287	Nombre de pages : 29	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques 2 Appliquées ESSEC BS

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

Partie 3 :

12) D'abord h de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions usuelles l'étant dont le denominateur ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$.

De plus, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (croissance comparées) donc, h continue en 0.

Ensuite, étudions h' en 0. On étudie son taux d'accroissement.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x}$$

$$= \frac{\frac{e^x - 1 - x}{x}}{x} = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}. \text{ On}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

en 0, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ (developpement limité) donc,

$\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$. Donc h derivable en 0 et $h'(0) = \frac{1}{2}$.

13) a) D'abord, montrons que g derivable.

h continue sur $\mathbb{R}^+$ donc il existe H telle que H primitive de h sur $\mathbb{R}^+$. $x \to x$ C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et $x \to 0$ aussi

donc, $g(x) = e^{-x}(H(x) - H(0))$

Donc par composée, g est bien derivable sur $\mathbb{R}^+$.

$\forall x \geq 0$,

$$g'(x) = (-e^{-x}) \int_0^x h(t) + e^{-x} (h(x) - h(0))$$

$$g'(x) = e^{-x} \left(- \int_0^x h(t) + h(x) - 1\right)$$

On $\int_0^x h'(t)\, dt = h(x) - h(0)$ donc par linéarité

de l'intégrale,

$$g'(x) = e^{-x} \left(1 - \int_0^x (h(t) - h'(t))\right) dt$$

b) $\forall t > 0$, h dérivable car $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$,

$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $h'(t) = \dfrac{e^t t - (e^t - 1)}{t^2}$

$h'(t) = \dfrac{e^t t - e^t + 1}{t^2}$.

Donc, $\forall t > 0$,

$h(t) - h'(t) = \dfrac{e^t - 1}{t} - h'(t)$

$= \dfrac{te^t - t - e^t t + e^t - 1}{t^2}$

$= \dfrac{e^t - 1 - t}{t}$.

c) D'après la question 1, $\forall t \in \mathbb{R}$ $e^t - 1 - t \geq 0$

Or, comme $t > 0$ et que $h(0) = 0$ (question 1) alors,

$\forall t > 0$, $e^t - 1 - t > 0$ et $t^2 > 0$ donc,

$\forall t > 0$, $h(t) - h'(t) > 0$.

de plus en 0, $1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ donc strictement supérieur à 0.

Donc,

$\forall t \geq 0$, $h(t) - h'(t) > 0$.

$\forall t > 0,$

$$h(t) - h'(t) = \frac{e^t - 1 - t}{t^2}.$$

donc, $h(t) - h'(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^t}{t^2}.$

Or, l'intégrale de terme générale $\frac{e^t}{t^2}$ diverge par croissance comparée.

De ce fait, comme $\forall t \geq 0,$ $h(t) - h'(t) > 0$, alors, par critère d'equivalence sur des intégrales positives,

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x (h(t) - h'(t))\, dt = +\infty$$

d)

$\forall x \geq 0,$ $e^{-x} > 0.$

Donc g' du signe de $1 - \int_0^x (h(t) - h'(t))dt.$

donc,

$$g'(x) \geq 0 \iff 1 \geq \int_0^x (h(t) - h'(t))\, dt$$

$$g'(x) = 0 \iff \int_0^x (h(t) - h'(t))\, dt = 1$$

$$g'(x) \leq 0 \iff \int_0^x (h(t) - h'(t))\, dt \leq 1.$$

Donc : 0 ~~avec~~

~~Variations~~ du signe de g'	+	-
Variations de g	↗	↘

Copie anonyme - n°anonymat : 800252

Code épreuve : 287	Nombre de pages : 29	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques 2 Appliquées ESSEC BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

On a bien le V car g d'abord croissante puis decroissante, d'après les variations explicitées. et $V > 0$ car $g'(0) = e^{-x}$.

1 (4) a)

b) $\forall t > 0$ on a l'inégalité précédente. ~~Donc $\forall x > 0$~~

$\forall t > 0 \quad \frac{1}{2} \leq h(t) - h'(t) \leq \frac{1}{2} e^t$.

Comme les fonctions sont continues sur $\mathbb{R}^+$, $0 \leq x$ et donc par croissance de l'intégrale

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{1}{2} \leq \int_0^x (h(t) - h'(t))\, dt \leq \int_0^x \frac{1}{2} e^t\, dt$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}x \geq -\int_0^x (h(t) - h'(t))\, dt \geq -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\Rightarrow \frac{3-e^{x}}{2} \leq 1 - \int_0^x (h(t) - h'(t))\,dt \leq 1 - \frac{x}{2}$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$,

$\Rightarrow e^{-x} \frac{3-e^{x}}{2} \leq g'(x) \leq e^{-x}\left(1 - \frac{x}{2}\right)$

c) On a, $g'(\gamma) = 0$ donc, en appliquant en 0 cette inégalité,

$\Rightarrow e^{-\gamma} \frac{3-e^{\gamma}}{2} \leq g'(\gamma) \leq e^{-\gamma}\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)$

En composant par la fonction ln, bijection croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

$\Rightarrow$ $\leq$

15a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, n]$

D'abord, comme $\forall x \in [0, n]$ $x \geq 0$, alors, comme $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

et donc $\Rightarrow$ $\underline{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq e^x}$

~~b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, n]$,~~

15)

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, n]$, et t

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{t^{k-1}}{k!} \leq h(t) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{k-1}}{k!} + \frac{t^n}{n!}$$

On a des fonctions continues sur $[0, x]$ par somme et $0 \leq x$ donc,

par croissance de l'intégrale,

$$\Rightarrow \int_0^x \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{k-1}}{k!} dt \leq \int_0^x h(t)\, dt \leq \int_0^x \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{k-1}}{k!} + \frac{t^n}{n!} dt$$

Par linéarité, $k \geq 1$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \frac{x^k}{k} \leq \int_0^x h(t)\, dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \frac{x^k}{k} + \frac{1}{n!} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Or, $e^{-x} > 0$ donc

$$\Rightarrow e^{-x} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!k} \right) \leq g(x) \leq e^{-x} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!k} \right) + e^{-x}$$

$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

Or, les séries exhibées convergent par critères de comparaisons sur des séries positives avec la série exponentielle.

De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{-x} = 0$

donc,

Copie anonyme - n°anonymat : 800252

Code épreuve : 287	Nombre de pages : 25	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques 2 Appliquées ESSEC BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

par passage à la limite, on a avec $x \in [0,+\infty[$

$$e^{-x}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!\,k}\right) \leq g(x) \leq e^{-x}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!\,k}\right)$$

Donc $\forall x \geq 0$, $g(x) = e^{-x}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!\,k}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Partie 4

17)

a) $[K_{n,s} = 1]$ signifie qu'il n'y a qu'un seul indice k tel que $X_k(w) > s$.

$[Y_{n,s} = Z_n]$ signifie que le maximum des $(X_k(w))$ vaut le plus petit k tel que $X_k > s$.

Or, s'il n'y a qu'un seul indice k tel que $X_k(w) > s$, c'est nécessairement le plus grand.

Donc, $[K_{n,s} = 1] \subset [Y_{n,s} = Z_n]$.

Par croissance de la probabilité,

$\Rightarrow P(Y_{n,s} = Z_n) \geq P(K_{n,s} = 1)$

b)

18)

→ Suite

19)

a) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$P_{A_j}(X_i \leq x) = 0$ si $x \in]-\infty, 0]$.

En effet comme A_j réalisé alors, $\bigcap_{i \in I_j} [X_i > 0]$

~~Si~~ Sinon, $P(X_i \leq x) =$ Admis.

Copie anonyme - n°anonymat : 800252

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 29

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques 2 Appliquées ESSEC BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

19)c)

20) Par théorème d'encadrements, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{h\lambda^2}{n} = 0$ alors

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left|\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} - \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right|\right) = 0$$

On, comme les termes sont tous positifs, car valeur absolue,

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!\,k} e^{-\lambda}$$

Car $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-r)^n = 0$ car $|1-r| < 1$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} m = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!\,k}\right)e^{-\lambda}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

/

/

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751