Copie anonyme - n°anonymat : 527628

N5-00077
527628
Mat Appro

Code épreuve : 282 | **Nombre de pages :** 19 | **Session :** 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies ESSEC BS/HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

1. ~~Soit $i \in [\![1,p]\!]$. Posons~~

Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ on note $\ell(e_i) = \lambda_i \in \mathbb{R}$.

$\mathcal{B}_E$ est orthonormale donc :

$$\forall x \in E, \quad \ell(x) = \ell\left(\sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle_E e_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle_E \ell(e_i), \text{ linéarité de } \ell$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle_E \lambda_i$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \langle x, \lambda_i e_i \rangle_E, \text{ linéarité à droite de } \langle \cdot,\cdot \rangle_E$$

$$= \left\langle x, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \right\rangle_E, \text{ linéarité à droite de } \langle \cdot,\cdot \rangle_E$$

$$= \langle x, a_0 \rangle_E$$

Où $a_0 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$ et on a bien l'existence.

Soit $a_1 \in E$ qui vérifie la condition : $\forall x \in E, \ell(x) = \langle a_1, x \rangle_E$.

Alors :

$$\ell(a_0 - a_1) = \cancel{\langle x,} \langle a_0 - a_1, a_0 \rangle_E$$

Mais aussi :

$$\ell(a_0 - a_1) = \langle a_0 - a_1, a_1 \rangle_E$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc :

$$\langle a_0 - a_1, a_0 \rangle_E - \langle a_0 - a_1, a_1 \rangle_E = 0$$

Par linéarité à droite de $\langle \cdot , \cdot \rangle_E$:

$$\langle a_0 - a_1, a_0 - a_1 \rangle_E = \|a_0 - a_1\|_E^2 = 0$$

Donc par définition de $\langle \cdot , \cdot \rangle_E$: $a_0 - a_1 = 0$ d'où $a_0 = a_1$

Donc on a l'unicité de a_0.

2. Soit $y \in F$.

Posons $\ell : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \langle u(x), y \rangle_F \end{cases}$

Par linéarité de u et de $\langle \cdot , \cdot \rangle_F$ on a :

$$\forall x_1, x_2 \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \ell(\lambda x_1 + x_2) = \langle u(\lambda x_1 + x_2), y \rangle_F$$
$$= \lambda \langle u(x_1), y \rangle_F + \langle u(x_2), y \rangle_F$$

Ainsi ℓ est bien linéaire et par 1. :

$$\exists! \, z_y \in E, \forall x \in E, \quad \langle u(x), y \rangle_F = \ell(x) = \langle z_y, x \rangle_E$$

3. Soient $x_1, x_2 \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\cancel{\langle u(\lambda x_1 + x_2), y \rangle_F = \lambda \langle u(x_1), y \rangle_F + \langle u(x_2), y \rangle_F}$$
$$\cancel{= \lambda \langle z}$$

$\forall x \in E, \langle u(x), \lambda x_1 + x_2 \rangle_F = \lambda \langle u(x), x_1 \rangle_F + \langle u(x), x_2 \rangle_F$, linéarité à droite

$= \lambda \langle z_{x_1}, x \rangle_E + \langle z_{x_2}, x \rangle_E$

$= \langle \lambda z_{x_1} + z_{x_2}, x \rangle_E$, linéarité à gauche

Mais on a aussi que :

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x), \lambda x_1 + x_2 \rangle = \langle z_{\lambda x_1 + x_2}, x \rangle$$

Par unicité du vecteur de E vérifiant cette condition (unicité montrée dans 1) :

$$\lambda u^*(x_1) + u^*(x_2) = \lambda z_{x_1} + z_{x_2} = z_{\lambda x_1 + x_2} = u^*(\lambda x_1 + x_2)$$

D'où la linéarité de u^*.

4. ~~Soient i et j dans~~

Soit $i \in [\![1, p]\!]$ et $j \in [\![1, n]\!]$.

$u(e_j) = \sum_{k=1}^{n} \langle u(e_j), f_k \rangle_F f_k$, car $\mathcal{B}_F$ est orthonormale

Donc $A_{i,j} = \langle u(e_j), f_i \rangle_F$

On :

$u^*(f_i) = \sum_{k=1}^{p} \langle u^*(f_i), e_k \rangle_E e_k$ ($\mathcal{B}_E$ est orthonormale) donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u^*)_{j,i} = \langle u^*(f_i), e_j \rangle_F$

Donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u^*)_{j,i} = \langle u(e_j), f_i \rangle_F = A_{i,j}$$

Donc :

$$\left[{}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u^*)\right]_{i,j} = A_{i,j}$$

Donc : ${}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u^*) = A$

D'où :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u^*) = {}^tA$$

(car on a montré l'égalité pour tous les coefficients)

Alors :

$$\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u)) = \mathrm{rg}(A)$$

$$= \mathrm{rg}({}^tA),$$ (le rang est un invariant de transposition)

$$= \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u^*))$$

$$= \mathrm{rg}(u^*)$$

~~On a l'égalité matricielle :~~

$\cancel{{}^t\left[{}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\right.}$

$\cancel{\forall x \in E, \forall y \in F, \quad u^*}$

u^* est linéaire donc on peut appliquer le résultat précédent à u^* au lieu de u et il vient :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}((u^*)^*) = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u^*) = {}^t({}^tA) = A$$

Copie anonyme - n°anonymat : 527628

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 19 | Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies ESSEC BS/HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

D'où l'égalité : $(u^*)^* = u$

5. ~~$x \in \operatorname{Im}(u^*) \iff \exists y \in F,\ u^*(y) = x$~~

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in \operatorname{Im}(u^*)$. ~~et $y_2 \in \operatorname{Ker} u$.~~

Il existe $y_1 \in F$ tel que $u^*(y_1) = x$.

~~$\forall z \in \operatorname{Ker}(u),\ \langle u(x), z$~~

$\forall z \in \operatorname{Ker}(u),\ \langle x, z \rangle_E = \langle u^*(y_1), z \rangle_E$

$= \langle y_1, u(z) \rangle_F$, par (1)

$= \langle y_1, 0_F \rangle_F$

$= 0$

D'où $\operatorname{Im}(u^*) \subset \operatorname{Ker}(u)^{\perp}$

~~$\boxed{\supset}$ Réciproquement soit $z \in \operatorname{Ker}(u)^{\perp}$.~~

~~Alors :~~

~~$\forall x \in \operatorname{Ker}(u),\ \langle x, z \rangle_E = 0$~~

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

~~Alors : $rg(u^*) \leq \dim(\mathrm{Ker}(u)^\perp)$~~

~~Alors : $rg(u) = rg(u^*) \leq \dim(\mathrm{Ker}(u)^\perp) = p - \dim \mathrm{Ker}(u)$~~

formule du rang

Or : $rg(u) = rg(u^*) = p - \dim \mathrm{Ker}(u) = \dim(\mathrm{Ker}(u)^\perp)$,

par définition du supplémentaire orthogonal

L'inclusion et l'égalité des dimensions donne :

$$\mathrm{Im}\, u^* = \mathrm{Ker}(u)^\perp$$

6. $\boxed{\supset}$ Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$.

Alors : $u^*(u(x)) = u^*(0_F) = 0_E$

et $x \in \mathrm{Ker}(u^* \circ u)$

Donc $\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Ker}(u^* \circ u)$.

$\boxed{\supset}$ ~~Le résultat précédent~~. Soit $y \in \mathrm{Ker}(u^* \circ u)$.

~~$\|u(y)\|_F^2 =$~~

$< u(y), u(y) >_F = < z_{u(y)}, y >_E$

$= < u^*(u(y)), y >_E$

$= 0$ car $y \in \mathrm{Ker}(u^* \circ u)$

Donc $\|u(y)\|_F = 0$ et $u(y) = 0_F$

et $y \in \mathrm{Ker}\, u$

Suite à la fin de la question →

La formule du rang donne :

$p = \dim \mathrm{Im}(u^* \circ u) + \dim \mathrm{Ker}(u^* \circ u) = \dim \mathrm{Im}(u^* \circ u) + \dim \mathrm{Ker}\, u$

On applique une deuxième fois la formule du rang :

$\dim \mathrm{Im}\, u^* = \mathrm{rg}\, u^* = \mathrm{rg}\, u = p - \dim \mathrm{Ker}\, u = \dim \mathrm{Im}(u^* \circ u)$

Or il est immédiat que $\mathrm{Im}(u^* \circ u) \subset \mathrm{Im}(u^*)$

donc :

$\mathrm{Im}\, u^* \circ u = \mathrm{Im}\, u^*$

Suite : $\mathrm{Ker}(u^* \circ u) \subset \mathrm{Ker}\, u$ d'où, par double inclusion, l'égalité.

7. Montrons que w est un isomorphisme :

- w est bien définie car $\forall x \in \mathrm{Im}(u^*)$, $u^* \circ u(x) \in \mathrm{Im}(u^*)$
- Soient $x_1, x_2 \in \mathrm{Im}(u^*)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} w(\lambda x_1 + x_2) &= u^* \circ u(\lambda x_1 + x_2) \\ &= u^*(\lambda u(x_1) + u(x_2)) \\ &= \lambda u^*(u(x_1)) + u^*(u(x_2)) \\ &= \lambda w(x_1) + w(x_2), \text{ par linéarité de } u \text{ et } u^* \end{aligned}$$

Donc w est linéaire.

- Soit $x \in \mathrm{Ker}\, w$. Alors $x \in \mathrm{Ker}\, u^* \circ u$ donc $x \in \mathrm{Ker}\, u$ par 6. ~~donc~~

Or $x \in \mathrm{Im}\, u^*$ donc $x \in \mathrm{Ker}(u)^\perp$ par 5.

Ainsi : $\|x\|_E^2 = 0_E$ car $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(u)^\perp$

donc $x = 0_E$.

Ainsi $\operatorname{Ker} w \subset \{0_E\}$ et on a l'égalité $\operatorname{Ker} w = \{0_E\}$ car $\{0_E\} \subset \operatorname{Ker} w$ (c'est un espace vectoriel).

Ainsi w est une application injective. Comme c'est aussi un endomorphisme de $\operatorname{Im}(u^*)$ qui est de dimension finie :

w est un automorphisme.

Ainsi :

~~$\exists!\, B \in \mathcal{M}_{\dim(\operatorname{Im}^*)}(\mathbb{R}),\ \forall X, Y \in \mathcal{M}_{\dim(\operatorname{Im}^*),1}(\mathbb{R}),$ ${}^tA \cdot A$~~

$\exists!\, B \in \mathcal{M}_{\dim(\operatorname{Im}^*)}(\mathbb{R}),\ \forall X, Y \in \operatorname{Im}({}^tA),$

$${}^tA \cdot A X = Y \iff X = BY$$

8. (a) Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

$$QAX = AX \text{ car } AX \in \operatorname{Im}(A) = \operatorname{Im}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(u))$$

Donc on a l'égalité entre les applications linéaires canoniquement associées à QA et A donc :

$$QA = A$$

(matrice d'un projecteur orthogonal)

$\mathcal{B}_F$ est orthonormale donc Q est symétrique et :

$${}^tAQ = {}^tA\,{}^tQ = {}^t(QA) = {}^tA$$

(b) Q est diagonalisable par le théorème spectral car symétrique donc il existe : ~~$D = ($~~

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$$ où les (λ_i) sont les valeurs propres de D

et une matrice $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ inversible telles que

$$Q = PDP^{-1}$$

Q est un projecteur donc on montre que $\mathrm{Im}(p_{\mathrm{Im}(u)})$

$$= E_1(p_{\mathrm{Im}(u)}) = \mathrm{Im}(u)$$

(où u désigne le projecteur orthogonal de F sur $\mathrm{Im}(u)$)

et 0 est son unique autre valeur propre donc comme la trace est un invariant de similitude :

$$\mathrm{Tr}(Q) = \mathrm{Tr}(D) = \sum_{\lambda \in Sp(\mathrm{Im}_u)} \lambda$$

$$= \sum_{\dim E_1(p_{\mathrm{Im}(u)})} 1$$

$$= \mathrm{rg}(p_{\mathrm{Im}(u)})$$

$$= \mathrm{rg}(u)$$

9. Soit $X \in \mathrm{Ker}\, A$.

$MX = {}^tA\, AX = 0_{p,1}$ donc $\mathrm{Ker}\, A \subset \mathrm{Ker}\, {}^tA A = \mathrm{Ker}\, M$

Soit $X \in \mathrm{Ker}\, {}^tA A$.

Alors :

$$MX = 0_{p,1} \quad \text{donc} \quad {}^tX\,{}^tA A X = 0_{p,1}$$

$$\text{donc} \quad \| A X \| = 0$$

$$\text{donc} \quad A X = 0_{p,1} \text{ et } X \in \operatorname{Ker} M$$

Donc $\operatorname{Ker} {}^tA A \subset \operatorname{Ker} A$ et par double inclusion $\operatorname{Ker} {}^tA A = \operatorname{Ker} A$.

La formule du rang assure alors que :

$$p = \dim \operatorname{Im}(A) + \dim \operatorname{Ker}(A) = \dim \operatorname{Im}(M) + \dim \operatorname{Ker}(M)$$

Donc :

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}({}^tA A) = \operatorname{rg}(M)$$

D'où :

$$M \text{ inversible} \iff \operatorname{rg}(M) = p$$

$$\iff \operatorname{rg}(A) = p$$

10. (a) Si A est de rang p, M est inversible et :

$${}^tA\,Q\,A = {}^tA A = M$$

Donc :

$$(M)^{-1}\,{}^tA\,Q\,A = I_p$$

Donc :

$$(M)^{-1}\,{}^tA\,Q\,M = {}^tA$$

$${}^tM \cdot {}^t(M^{-1}) = {}^t(M^{-1} \cdot M) = I_p$$

Donc ${}^tM$ est inversible avec $({}^tM)^{-1} = {}^t(M^{-1})$ donc :

$${}^tM\, Q = A\,{}^tA\, Q = A^t A$$

D'où :

$$Q = {}^t(M^{-1})\, A\, {}^tA$$

Par symétrie de Q :

$$Q = {}^tQ = A\,(M)^{-1}\,{}^tA$$

(b)
```
def Calcule_Q(A):
    a, p = np.shap(A)
    if p != al.matrix_rank(A):
        return -1
    else:
        M = np.dot(np.transpose(A), A)
        M1 = al.inv(M)            # M^{-1} <-
        B = np.dot(M1, np.transpose(A))   # M^{-1}.tA <-
        Q = np.dot(A, B)
        return Q
```

11. $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX M X = {}^tX\,{}^tA A X$

$$= {}^t(AX)\, AX$$

$$= \|AX\|^2 \geq 0$$

12. $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $\forall H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$$J_0(X+H) = \frac{1}{2}\|A(X+H) - Y\|^2$$

$$J_0(X+H) = \frac{1}{2}\left(\|AX-Y\|^2 + 2<AX-Y, AH> + \|AH\|^2\right)$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} J_0(X) + {}^t(AX-Y)\cdot AH + \frac{1}{2}\,{}^tH\,{}^tAAH$$

$$= J_0(X) + \left({}^tX\,{}^tAAH - {}^tY AH\right) + \frac{1}{2}\,{}^tHMH$$

$$= J_0(X) + {}^t(MX - {}^tAY)\cdot H + \frac{1}{2}\,{}^tHMH$$

$$= J_0(X) + <D(X), H> + \frac{1}{2}\,{}^tHMH$$

13. Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ $\boxed{\Leftarrow}$ Si $D(X) = 0$ alors :

$$\forall H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ J_0(X+H) - J_0(X) = \frac{1}{2}\underbrace{{}^tHMH}_{\geq 0} \geq 0 \text{ par 11.}$$

Donc J admet un minimum global en X.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que J_0 admette un minimum global en X. Alors :

$$\forall H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R},\ J_0(X+\lambda D(X)) - J_0(X)$$

$$= <D(X), \lambda D(X)> + \frac{1}{2}\cdot\lambda^2\,{}^tD(X)HD(X)$$

$$= \lambda\cdot\|D(X)\|^2 + \frac{\lambda^2}{2}\,{}^tD(X)HD(X)$$

$$\geq 0$$

Donc en reconnaissant un polynôme d'ordre 2 (si ${}^tD(X)HD(X) = 0$ on montre, en faisant tendre λ vers $+\infty$ ou $-\infty$, que si $D(X) \neq 0$ alors $\|D(X)\|^2 \neq 0$

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 19 | Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies ESSEC BS/HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

et donc $J_0(X + \lambda D(X)) - J_0(X)$ est strictement négative à partir d'un moment ce qui est absurde (car X minimum global) de coefficient dominant positif et toujours positif, son discriminant est ~~nul~~ négatif donc :

$$0 \leq \| D(X) \|^4 \leq 0$$

Donc : $D(X) = 0$

14. Soit $X \in S_0 \cap \ker(A)^{\perp}$.

$D(X) = 0$ donc $MX = {}^tAY$ ~~donc~~

Le vecteur de F ~~canoniquement~~ associé à X dans la base $\mathcal{B}_F$ est dans $\ker u^{\perp} = \mathrm{Im}(u^*)$ car $X \in \ker(A)^{\perp}$ donc par 7. il existe une unique matrice $B \in \mathcal{M}_{\dim(\mathrm{Im}(u^*))}(\mathbb{R})$ telle que :

$$X = B\,{}^tAY$$

Donc $S_0 \cap \ker(A)^{\perp} \subset \{B\,{}^tAY\}$ et la réciproque est claire donc $X_0 = B\,{}^tAY$ convient.

15. (a) $D(X)=0$ donc ${}^tAAX = {}^tAY$

$$= {}^tAQY$$

Donc le vecteur z associé à $AX-Y$ dans la base $\mathcal{B}_F$ ~~est~~ dans $\ker(u^*)$ car ${}^tA(AX-QY)=0$.

Or $AX \in \mathrm{Im}(A)$ et $QY \in \mathrm{Im}(A)$ car ~~Q projett~~
Q est la matrice dans $\mathcal{B}_F$ du projecteur orthogonal de F sur $\mathrm{Im}(u)$. Ainsi, par combinaison linéaire,

$$AX-QY \in \mathrm{Im}(A) \text{ et } z \in \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}((u^*)^*) = \ker(u^*)^\perp$$

par 5.

Alors $z \in \ker(u^*) \cap \ker(u^*)^\perp$ donc $z = 0_F$ donc :

$$AX - QY = 0 \text{ donc } AX = QY$$

(b) $A(X-X_0) = AX - AX_0$

$$= QY - AX_0$$

$$= -(AX_0 - QY)$$

$$= 0 \text{ car } X_0 \in S_0 \text{ donc vérifie } (3)$$

donc $X - X_0 \in \ker(A)$

$X_0 \in \ker(A)^\perp$ donc :

$${}^tX_0(X-X_0) = 0 \quad (\text{avec } X \neq X_0)$$

Donc :

$$\|X_0\|^2 = \langle X_0, X\rangle$$

Donc :

$$\|X-X_0\|^2 = \|X\|^2 - 2\langle X_0, X\rangle + \|X_0\|^2$$

et $\|X-X_0\|^2 = \|X\|^2 - \|X_0\|^2$

Comme $X - X_0 \neq 0$, $\|X - X_0\|^2 > 0$ d'où :

$$\|X\|^2 > \|X_0\|^2 \geq 0$$

et $\|X\| > \|X_0\|$, par stricte croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$

(c) ~~Soit~~

$X \in S_0 \iff D(X) = 0 \iff MX = {}^tAY$

$\iff \underbrace{M^{-1}M}_{=I_p} X = M^{-1}\,{}^tAY$

Donc $S_0 = \{X\}$ avec $X = M^{-1}\,{}^tAY$

16. $T = \|A(X - U_0)\|^2$

$= \|QY - AU_0\|^2$

$= \|Q(AU_0 + Z) - AU_0\|^2$

$= \|AU_0 + QZ - AU_0\|^2$ car $AU_0 \in \mathrm{Im}(A)$

$= \|QZ\|^2 = {}^tZ\,{}^tQQZ = {}^tZ\,Q^2 Z = {}^tZQZ$

car Q est symétrique et $Q^2 = Q$ en tant que matrice d'un projecteur orthogonale dans une base orthonormée.

(b)
```
def simuleT(A, sigma):
    Q = Calcule_Q(A)

    n,p = np.shape(A)
    ~~Z = np.zeros(n)~~
    Z = rd.normal(0, sigma,[n, 1])
tZ <- TZ = np.transpose(Z)
QZ <- A = np.dot(Q, Z)

    T = np.dot(TZ, A)
    return T
```

(c)
```
def esperance(A, sigma):
    S = 0
    for i in range(1000):
        S += T
    E = S / 1000
    return E
```

(d) ~~$Tr(A_1) =$~~

~~$Tr({}^tA_1 A_1) = Tr\Big(\Big(\; {}^1 \;\, {}^1 \;\; \ddots$~~

~~$= Tr\Big($~~

On voit que $rg(A_1) = 2$; $rg(A_2) = 3$ et $rg(A_3) = 5$ car les vecteurs colonnes sont "échelonnés".

On peut donc conjecturer que $E(T) = p = rg(A)$

Copie anonyme - n°anonymat : 527628

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 19 | Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies ESSEC BS / HEC

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

(e) Par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(Z_1) = \sigma^2 = E(Z_1^2) - \underbrace{E(Z_1)}_{=0}{}^2$$

Donc $E(Z_1^2) = \sigma^2$

~~La formule de transfert donne : ton a bien l'absolue convergence par un critère de Riemann puisqu'il y a de l'exponentielle~~ dans l'integ

$$x^5 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \text{ donc } x^3 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Par critère de Riemann ($2 > 1$), ~~le~~ critère de négligeabilité sur les ~~intégrandes à~~ intégrales à intégrandes positives ~~et~~ donne que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} x^3 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx$ converge absolument donc, par imparité de l'intégrande :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \text{ aussi}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Par théorème de transfert et imparité :

$$E(z_1^3) = 0$$

La formule de Koenig-Huygens donne encore :

17. $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\|u + tv\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (u_i + tv_i)^2}.$$

Posons $g : t \in \mathbb{R} \longmapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (u_i + tv_i)^2}$

Cette fonction est dérivable par composition sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i(u_i + tv_i)}{g(t)}$$

Donc en particulier :

$$g'(0) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|}$$

En reconnaissant le taux d'accroissement entre 0 et t de g :

$$\lim_{t \to 0} \frac{\overbrace{\|u + tv\|}^{= g(t)} - \overbrace{\|u\|}^{= g(0)}}{t - 0} = g'(0) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|}$$

18. $J(X) - \|BX\| = J_0(X)$ pour ~~tout~~ $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et ~~par transformation~~ il est clair que X_0 ~~n'est min~~ est minimum global de J si et seulement si il l'est aussi pour J_0 par différence. Donc par 13. :

$D(X_0) = 0$ donc $MX_0 - {}^tAY = 0$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751