N5-00077 527628 Mat2 Appro

Code épreuve : 283	Nombre de pages : 23	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques 2 approfondies ESCP BS/HEC Paris

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

1. (a) Soit $i \in [\![1, m]\!]$. X_i admet un moment d'ordre 2 et par la formule de Koenig-Huygens :

$$1 = V(X_i) = E(X_i^2) - (\underbrace{E(X_i)}_{=0})^2 = E(X_i^2)$$

Par linéarité de l'espérance S_m admet une espérance avec :

$$E(S_m) = E\left(\sum_{i=1}^m X_i^2\right) = \sum_{i=1}^m \underbrace{E(X_i^2)}_{=1} = m$$

(b)
```
def simul(m):
    S=0
    for i in range(m):
        S+= rd.normal(0,1)**2
    return S
```

(c) On peut ~~conjecturer que S_m n'est pas presque sûrement constante car il semble que $E(S_m^2) - m^2 = \underbrace{E(S_m^2) - E(S_m)^2}_{= V(S_m) \text{ par la}} \xrightarrow[m\to+\infty]{} +\infty$~~

La fonction simule la différence $E(S_m^2) - (E(S_m))^2 = E(S_m^2) - m^2$ formule de Koenig-Huygens en approximant $E(S_m^2)$ et comme elle donne $E(S_1^2) - 1 \approx 2$; $E(S_2^2) - 2^2 \approx 4$ ... on conjecture que $V(S_m) = 2m$ par la formule de Koenig-Huygens.

2. (a) $W_1 = \frac{1}{2} S_1 = \frac{1}{2} X_1^2$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

W_1 est presque sûrement à valeurs strictement positives d'où :

. $\forall x \in \mathbb{R}_-$, $P(W_1 \leq x) = 0$

. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $P(W_1 \leq x) = P(X_1^2 \leq 2x)$

$= P(|X_1| \leq \sqrt{2x})$, par stricte croissance de $x \mapsto x^2$

$= P(-\sqrt{2x} \leq X_1 \leq \sqrt{2x})$

$= P(X_1 \leq \sqrt{2x}) - P(X_1 \leq -\sqrt{2x})$, car X_1 est à densité

Par composition on a donc que la fonction de répartition de W_1 est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. W_1 est à densité et une densité f est obtenue par dérivation :

. $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $f(x) = 0$

. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}\left(\varphi(\sqrt{2x}) + \varphi(-\sqrt{2x})\right)$

$= \sqrt{\dfrac{2}{x}} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{(\sqrt{2x})^2}{2}\right)$, par parité de φ

$= \dfrac{1}{\sqrt{\pi x}} \exp(-x)$

(b) f est une densité de probabilité donc en considérant g une densité d'une variable de loi $\gamma(1/2)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

Soit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(1/2)} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x\pi}} e^{-x}\, dx$$

Donc :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/2)} = \frac{\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x}\, dx}{\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x}\, dx}_{>0}} = 1$$

D'où :

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

(c) Par égalité en loi des $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$:

$\forall i \in [\![1,m]\!]$, $\frac{1}{2}X_i^2$ suit la même loi que W_1

Par le lemme des coalitions les $(\frac{1}{2}X_i^2)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont encore mutuellement indépendants donc, par somme de variables aléatoires suivant la loi $\gamma(1/2)$ et indépendantes :

$\forall m \in \mathbb{N}^*$,

$$W_m = \frac{1}{2}S_m = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2}X_i^2 \hookrightarrow \gamma\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2}\right)$$

Donc ~~$W_m \hookrightarrow \gamma(\frac{m}{2})$~~ $W_m \hookrightarrow \gamma\left(\frac{m}{2}\right)$

(d) On a alors : ~~$E(W_m) \neq$~~ $E(S_m) = 2\cdot E(\frac{1}{2}S_m)$, linéarité de l'espérance
$\forall m \in \mathbb{N}^*$

$$= 2\cdot E(W_m)$$
$$= 2\cdot \frac{m}{2}$$
$$= m, \text{ pour tout } m\in\mathbb{N}^*$$

Les propriétés de calcul de la variance donnent :

$$V(S_m) = V\left(2\cdot\frac{1}{2}S_m\right) = 4\cdot V(W_m)$$
$$= 4\cdot\frac{m}{2} = 2m$$

3. (a) Soit $m \geq 3$. On a que $\frac{m}{2} > \frac{2}{2} = 1$ donc $\frac{m}{2} - 1 > 0$ et par définition de Gamma sur $\mathbb{R}_+^*$ on peut écrire :

$$\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right) = \int_0^{+\infty} x^{\frac{m}{2}-2} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-x} dx$$

converge donc converge absolument par positivité de l'intégrande donc le théorème de transfert assure que :

$E\left(\frac{1}{W_m}\right)$ existe et vaut $\displaystyle\frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-x} dx$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})} \cdot \Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)$$

Donc, par linéarité de l'intégrale : $\forall m \in \mathbb{N}$, avec $m \geq 3$

$$E\left(\frac{1}{S_m}\right) = E\left(\frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{2}S_m}\right)$$

$$= \frac{1}{2} E\left(\frac{1}{W_m}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{m}{2}-1)}{\Gamma(\frac{m}{2})}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{m}{2}-1)}{\Gamma\left((\frac{m}{2}-1)+1\right)}$$

$$= \frac{1}{2(\frac{m}{2}-1)} \cdot \frac{\Gamma(\frac{m}{2}-1)}{\Gamma(\frac{m}{2}-1)}$$

$$= \frac{1}{m-2}$$

(b) Pour tout $m \in \mathbb{N}$ avec $m \geq 3$ on a que S_m est presque sûrement à valeurs strictement positives donc par croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$:

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{S_m}} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{S_m}}\right)^2 \leq \frac{1}{S_m}$$

Et comme, par 3. (a), $\frac{1}{S_m}$ admet une espérance il vient, par domination, que $\frac{1}{\sqrt{S_m}}$ admet une espérance.

Copie anonyme - n°anonymat : 527628

Code épreuve : 283	**Nombre de pages :** 23	**Session :** 2025

Épreuve de : Mathématiques 2 approfondies ESCP BS / HEC Paris

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

4. Notons F_{T_m} $(m \geq 1)$ la fonction de répartition de T_m. ~~F_{T_m} est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la densité~~ de T_m qui est strictement positive sur $\mathbb{R}$. F_{T_m} est continue sur $\mathbb{R}$ car T_m est à densité. Le théorème de la bijection donne alors que F_{T_m} réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;1[=]\lim\limits_{x\to-\infty} F_{T_m}(x) ; \lim\limits_{x\to+\infty} F_{T_m}(x)[$.

En particulier, ~~comme $\alpha \in]0;1[$~~, $1-\alpha \in]0;1[$ et ~~on a l'existence et l'unicité~~

Ainsi par composition et produit on a que :

$G : x \in \mathbb{R} \mapsto$

Posons $G_m : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto P(|T_m| \leq x) = P(T_m \leq x) - P(T_m \leq -x)$, car T_m est à densité

$= F_{T_m}(x) - F_{T_m}(-x)$

Par composition et somme G_m est continue sur $\mathbb{R}_+$ car F_{T_m} l'est ~~en tant que~~ car T_m est à densité. Par composition et somme on a aussi que G_m est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car F_{T_m} l'est sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive sur $\mathbb{R}$ d'une fonction (la densité de T_m) strictement positive sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad G_m'(x) = F'_{T_m}(x) + F'_{T_m}(-x) > 0$$

G_n est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et par le théorème de la bijection :

G_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\left]\lim_{x\to 0} G_n(x), \lim_{x\to+\infty} G_n(x)\right[= \left]\lim_{x\to 0} F_{T_n}(x) - F_{T_n}(-x) ; \lim_{x\to+\infty} F_{T_n}(x) - F_{T_n}(-x)\right[$

$= \cancel{\left]-1 ; 1\right[}$

$=$

$= \left]0 ; 1\right[$

Par ailleurs $P(|T_n| \leq x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}_-^*$ donc on a bien et l'existence et l'unicité de $t_{n,\alpha} \in \mathbb{R}$ tel que $P(|T_n| \leq t_{n,\alpha}) = G_n(t_{n,\alpha}) = 1-\alpha$ car $1-\alpha \in \left]0;1\right[$

5. (a) $\forall n \geq 3$, Par le lemme des coalitions Y et $1/\sqrt{S_n/n}$ sont indépendantes car Y est indépendante des $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ donc : $\forall n \geq 3$, $E(T_n) = E(Y) \cdot E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n/n}}\right)$

$= 0 \cdot E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n/n}}\right)$

$= 0$

(b) $\forall n \geq 3$ Y admet un moment d'ordre et $\frac{1}{\sqrt{S_n/n}}$ aussi donc par indépendance de Y^2 et $\left(\frac{1}{\sqrt{S_n/n}}\right)^2$ ~~(lemme des coalitions)~~ T_n (lemme des coalitions) T_n aussi et par la formule de Koenig-Huygens :

$V(T_n) = E\left(Y^2 \cdot \frac{n}{S_n}\right)$

$= E(Y^2) \cdot n \cdot E\left(\frac{1}{S_n}\right) - \underbrace{\cancel{E(Y) \cdot E}\ E(T_n)^2}_{=0}$

$= 1 \cdot \frac{n}{n-2} = \frac{n}{n-2}$

(c) ~~E~~

$\forall n \geq 3$, $E\left((T_n - Y)^2\right) = E\left(T_n^2 - 2T_n Y + Y^2\right)$

$= V(T_n) - 2\,E(Y^2) \cdot E\left(\sqrt{\frac{n}{S_n}}\right)$

$+ E(Y^2)$

$= \frac{n}{n-2} - 2 \cdot V(Y) \cdot \sqrt{\frac{n}{2}}\, E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$

$+ V(Y)$, linéarité de l'espérance

$= \frac{n}{n-2} - 2\sqrt{\frac{n}{2}}\, E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$

$+ 1$

$= \frac{2n-2}{n-2} - \sqrt{2n}\; E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$

6. (a) Soit $n \geq 2$:

$W_{n+1} = \frac{1}{2} S_{n+1} = \frac{1}{2} S_n + \frac{1}{2} X_{n+1}^2$

$\geq \frac{1}{2} S_n = W_n > 0$

Ainsi, par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$ et décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}} \leq \frac{1}{\sqrt{W_n}}$$

Donc la croissance de l'espérance fournit :

$$u_{n+1} = E\left(\frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}}\right) \leq E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right) = u_n$$

$(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.

~~1~~. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^{A}$
$= 1$

• $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x}\,dx$ est de même nature que $2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du$ par le changement de variable C^1 et strictement croissant $u = \sqrt{x}$

En reconnaissant une densité de la loi $\mathcal{N}(0;1)$:

$2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du$ existe et vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du$, par parité

$= \sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2}\,du$

$= \sqrt{2\pi}$

Ainsi par le théorème de transfert (la convergence absolue étant garantie par la positivité de l'intégrande) :

$u_2 = E\left(\frac{1}{\sqrt{W_2}}\right) = \frac{1}{\Gamma(1)}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x}\,dx$, $W_2 \hookrightarrow (1)$

$= 1 \cdot \sqrt{2\pi}$

$= \sqrt{2\pi}$

(b) Soit $n \geq 2$:

~~$(u_{n+1} \cdot u_n)^2 =$~~

(a) $\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x}\,dx = \sqrt{\pi}$

Donc le théorème de transfert donne que $\Gamma(1/2) = E\left(\frac{1}{\sqrt{W_2}}\right) = \sqrt{\pi} = u_2$

car $W_2 \hookrightarrow (1)$ et on a bien la convergence absolue.

Copie anonyme - n°anonymat : 527628

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 23 | Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques 2 approfondies ESCP BS/HEC Paris

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

(c)
```
def suite_u(n):
    Val = np.zeros(n-1)
    ~~for i in~~
    Val[0] = np.sqrt(2*np.pi)
    for i in range(1, n-1):
        Val[i] = 2/((n-1)*Val[i-1])    par 6.(b)
    return Val
```

(d) On peut conjecturer que $n \cdot u_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(e) Par 6. (b) :

~~$n\, u_{n+1} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim}$~~

$$n\, u_{n+1} u_n = \frac{2n}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2$$

donc $u_{n+1} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$

~~On~~

~~(Si on avait $u_{n+1} \sim u_n$ on pourrait conclure en composant appliquant $x \mapsto \sqrt{x}$ continue sur $\mathbb{R}$~~

Supposons que $u_{n+1} \sim u_n$:

$$u_n^2 \sim \frac{2}{n} \quad \text{donc} \quad \frac{u_n^2}{\frac{2}{n}} \to 1$$

~~donc~~ $\frac{\quad}{u_n}$

~~donc $\frac{u_m}{\sqrt{m}}$~~

donc $\frac{u_m}{\sqrt{\frac{2}{m}}} \to 1$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 1

donc $u_m \sim \sqrt{\frac{2}{m}}$

7. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

$0 \leq P(|T_m - Y| \geq \varepsilon) = P((T_m - Y)^2 \geq \varepsilon^2)$

$\leq \frac{E((T_m - Y)^2)}{\varepsilon^2}$, par l'inégalité de Markov

$\leq \frac{\frac{2m-2}{m-2} - \sqrt{2m}\, E(\frac{1}{\sqrt{K_m}})}{\varepsilon^2}$

$\frac{2m-2}{m-2} \underset{m \to +\infty}{\sim} 2\frac{m}{m} = 2$ et $\sqrt{2m}\, u_m \underset{m \to +\infty}{\sim} \sqrt{2m}\sqrt{\frac{2}{m}} = 2$

donc $E((T_m - Y)^2) \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

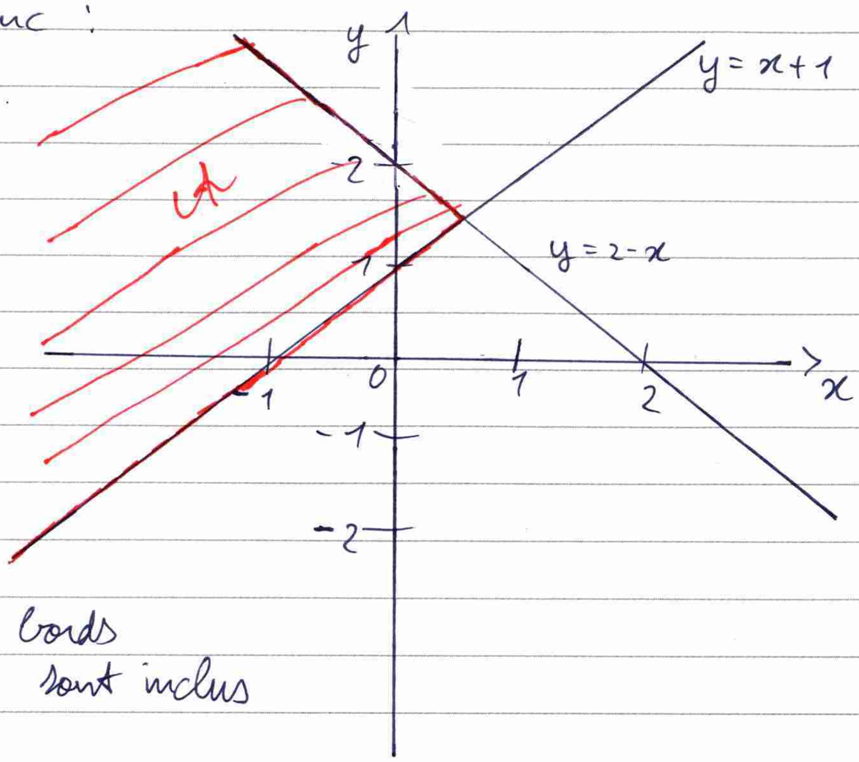
Par le théorème d'encadrement:

$P(|T_m - Y| \geq \varepsilon) \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

(T_m) converge donc en probabilité vers Y.

8. $(x, y) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow y \leq 2-x$ et $y \geq x+1$

Donc :



les bords sont inclus

9. (a) • $(x, y) \in \mathcal{A} \Rightarrow x+y \leq a$ et $x-y \leq b$

$\Rightarrow x \leq a-y$

• $x \in]-\infty, a-y] \Rightarrow x \leq a-y$

$\Rightarrow x \leq a - \frac{\cancel{a-b}}{2}$

$\left(-y \geq -\frac{b-a}{2}\right)$

$\leq \cancel{\frac{a-b}{2}}\ \cancel{\frac{3a-b}{2}}\ \frac{a+b}{2}$

$\Rightarrow x+y \leq \frac{a-b}{2} + \frac{a+b}{2} = a$

et $x-y \leq \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} = b$

$\Rightarrow (x, y) \in \mathcal{A}$

Donc $(x, y) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow x \in]-\infty; a-y]$.

~~10.~~ (b) Le résultat de 9.a assure que $\mathbb{1}_A(x,y)$ vaut 1 si et seulement si $x \in]-\infty; a-y]$ et 0 sinon

Donc : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\mathbb{1}_A(x,y)}_{} \cdot \varphi(x)\,dx$

$$= \begin{cases} 1 \text{ si } x \in]-\infty; a-y] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{par 9. (a)}$$

$$= \int_{-\infty}^{a-y} 1 \cdot \varphi(x)\,dx$$

$$= \Phi(a-y)$$

10. . $(x,y) \in A \Rightarrow x+y \leq a$ et $x-y \leq b$

$\cancel{(-y \geq \frac{b-a}{2})}$ $\quad \cancel{\Rightarrow x \leq \frac{a-b}{2}}$

$$\Rightarrow x \leq b+y$$

~~. (x,~~

. $x \in]-\infty; b+y] \Rightarrow x+y \leq b+2y \leq b+a-b = a$

$\cancel{(-y}$ $\quad$ et $x-y \leq b+y-y = b$

$$\Rightarrow (x,y) \in A$$

Donc de même que dans 9 on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\mathbb{1}_A(x,y)}_{} \varphi(x)\,dx$$

$$= \begin{cases} 1 \text{ si } x \in]-\infty; b+y] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$= \int_{-\infty}^{b+y} 1 \cdot \varphi(x)\,dx = \Phi(b+y)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 527628

Emplacement QR Code

Code épreuve : 283	Nombre de pages : 23	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques 2 approfondies ESCP BS / HEC Paris

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

11. (a) $\mathcal{A} = \overbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y\leq a\}}^{A_1}$

$\cap \overbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x-y\leq b\}}^{A_2}$

Or $(x,y)\mapsto x+y$ et $(x,y)\mapsto x-y$ sont continues car polynomiale sur $\mathbb{R}^2$ donc A_1 et A_2 sont des fermés donc $\mathcal{A}$ est un fermé comme intersection finie de fermés.

(b)

$$P((X,Y)\in\mathcal{A}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x,y) f(x)\,dx\right) g(y)\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x,y)\varphi(x)\,dx\right)\varphi(y)\,dy$$

, X et Y suivent la loi $\mathcal{N}(0;1)$

$$= \int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x,y)\varphi(x)\,dx\right)\varphi(y)\,dy + \int_{-\infty}^{0}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x,y)\varphi(x)\,dx\right)\varphi(y)\,dy$$

, par la relation de Chasles

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Alors : $\cancel{P((X,Y)\in A)} =$

$$\int_0^{+\infty} (\varphi(d+z) + \varphi(d-z))\, \Phi(c-z)\, dz$$

$$= \int_0^{+\infty} \varphi(d+z)\, \Phi(c-z)\, dz + \int_0^{+\infty} \varphi(d-z)\, \Phi(c-z)\, dz,$$ par linéarité

$=$

12. Par 11.(b) :

$$P((X,Y)\in A) = \int_0^{+\infty} (\varphi(d+z) + \varphi(d-z))\, \Phi(c-z)\, dz$$

Or $\Phi(c-z) = \int_{-\infty}^{c-z} \varphi(u)\, du$

$$= \underline{\int_{-\infty}^{c} \varphi(t-z)\, dt},$$ en faisant le changement de variable affine $\underline{t = u+z}$.

Par la linéarité de l'intégrale :

$$P((X,Y)\in \mathcal{A}) = \int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{c}(\varphi(d+z)+\varphi(d-z))\varphi(t-z)\,dz\right)dt$$

13. Soient $u, v \in \mathbb{R}$.

$$\varphi\left(\frac{u+v}{\sqrt2}\right)\cdot\varphi\left(\frac{u-v}{\sqrt2}\right)$$

$$\cancel{=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2\cdot \exp\left(-\left(\frac{(u+v)}{\sqrt2}\right)\right)}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \exp\left(-\frac{\left(\frac{u+v}{\sqrt2}\right)^2}{2}-\frac{\left(\frac{u-v}{\sqrt2}\right)^2}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \exp\left(-\frac{2uv-2uv+2u^2+2v^2}{4}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \exp\left(-\frac{u^2}{2}-\frac{v^2}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)$$

$$=\varphi(u)\varphi(v)$$

14. Par 12. :

$$P((X,Y)\in \mathcal{A}) = \int_{-\infty}^{c}\left(\int_0^{+\infty}(\varphi(d+z)+\varphi(d-z))\varphi(t-z)\,d\cancel{t}z\right)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{c}\left(\int_0^{+\infty}\varphi(d+z)\cdot\varphi(t-z)+\varphi(d-z)\cdot\varphi(t-z)\,dz\right)dt$$

Par la question 13. :

$$P((X,Y)\in A)=\int_{-\infty}^{c}\left(\int_0^{+\infty}\varphi\left(\frac{d+t}{\sqrt2}\right)\cdot\varphi\left(\frac{d-t+2z_1}{\sqrt2}\right)dz_1\right.$$

$$\left.+\int_0^{+\infty}\varphi\left(\frac{t-d}{\sqrt2}\right)\cdot\varphi\left(\frac{d-2z_2+t}{\sqrt2}\right)dz_2\right)dt$$

(on a échangé les rôles de u et v, $\varphi(v)\varphi(u)=\varphi\left(\frac{u+v}{\sqrt2}\right)\varphi\left(\frac{v-u}{\sqrt2}\right)$)

Faisons les changements de variable affines et décroissants strictement $w_1=-\frac{d-t+2z_1}{\sqrt2}$ et $w_2=\frac{d-2z_2+t}{\sqrt2}$. Alors:

$$P((X,Y)\in A)=\int_{-\infty}^{c}\left(\frac{1}{\sqrt2}\varphi\left(\frac{d+t}{\sqrt2}\right)\cdot\int_{-\infty}^{\frac{t-d}{\sqrt2}}\varphi(w_1)\,dw_1\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt2}\varphi\left(\frac{d-t}{\sqrt2}\right)\cdot\int_{-\infty}^{\frac{d+t}{\sqrt2}}\varphi(w_2)\,dw_2\right)dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt2}\int_{-\infty}^{c}\left(\varphi\left(\frac{d+t}{\sqrt2}\right)\cdot\Phi\left(\frac{t-d}{\sqrt2}\right)+\varphi\left(\frac{t-d}{\sqrt2}\right)\Phi\left(\frac{d+t}{\sqrt2}\right)\right)dt$$

15. Par 14. et linéarité:

$$P((X,Y)\in A)=\frac{1}{\sqrt2}\left(\int_{-\infty}^{c}\varphi\left(\frac{t_1+d}{\sqrt2}\right)\cdot\Phi\left(\frac{t_1-d}{\sqrt2}\right)dt_1+\int_{-\infty}^{c}\varphi\left(\frac{t_2-d}{\sqrt2}\right)\cdot\Phi\left(\frac{t_2+d}{\sqrt2}\right)dt_2\right)$$

Faisons les changements de variable affine et strictement croissants $u_1=\frac{t_1+d}{\sqrt2}$ et $u_2=\frac{t_2-d}{\sqrt2}$:

$$P((X,Y)\in A)=\frac{1}{\sqrt2}\left(\frac{1}{\sqrt2}\int_{-\infty}^{\frac{c+d}{\sqrt2}}\varphi(u_1)\cdot\Phi(u_1-\sqrt2\,d)\,du_1+\frac{1}{\sqrt2}\int_{-\infty}^{\frac{c-d}{\sqrt2}}\varphi(u_2)\cdot\Phi(\sqrt2\,d-u_2)\,du_2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\int_{\frac{c-d}{\sqrt{2}}}^{\frac{c+d}{\sqrt{2}}} \varphi(u_1)\Phi(u_1-\sqrt{2}d)\,du_1 + \cancel{2}\int_{-\infty}^{\frac{c-d}{\sqrt{2}}} \varphi(u_1)\cdot\Phi(u_1-\sqrt{2}d)\,du_1 + \int_{-\infty}^{\frac{c-d}{\sqrt{2}}} \varphi(u_2)\cdot\Phi(\sqrt{2}d-u_2)\,du_2\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\int_{\frac{c-d}{\sqrt{2}}}^{\frac{c+d}{\sqrt{2}}} \varphi(u_1)\Phi(u_1-\sqrt{2}d)\,du_1 + \int_{-\infty}^{\frac{c-d}{\sqrt{2}}} \varphi(x)\,dx\Big),$$

car $\Phi(y)+\Phi(-y)=1$ et par linéarité

$$\cancel{= \frac{1}{2}\Big(\Phi\Big(\frac{c+d}{\sqrt{2}}\Big) - \Phi\Big(\frac{c-d}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\int_{\frac{c-d}{\sqrt{2}}}^{\frac{c+d}{\sqrt{2}}} \varphi(u_1)\Phi(u_1-\sqrt{2}d)\,du_1 + \Phi\Big(\frac{c-d}{\sqrt{2}}\Big)\Big)$$

Non abouti.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

16. Soit $x \in \mathbb{R}$.

~~$P(W \leq x) = P$~~

Par stabilité par somme des lois normales :

$$X+Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0;2) \text{ et } X-Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0;2)$$

Par stabilité par transformation affine :

$$W \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0; \frac{2}{\sqrt{2}^2}\right) \text{ et } Z \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0; \frac{2}{\sqrt{2}^2}\right)$$

Ainsi W et Z suivent la loi $\mathcal{N}(0;1)$.

$$P((X,Y) \in \mathcal{A}) = P\left(\left[\frac{X+Y}{\sqrt{2}} \leq \frac{a}{\sqrt{2}}\right] \cap \left[\frac{X-Y}{\sqrt{2}} \leq \frac{b}{\sqrt{2}}\right]\right)$$

On $c+d = a$ et $c-d = b$ donc :

$$P\left(\left[\frac{X+Y}{\sqrt{2}} \leq \frac{a}{\sqrt{2}}\right] \cap \left[\frac{X-Y}{\sqrt{2}} \leq \frac{b}{\sqrt{2}}\right]\right) = \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) \cdot \Phi\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$$

et donc comme $a \mapsto \frac{a}{\sqrt{2}}$ et $b \mapsto \frac{b}{\sqrt{2}}$ parcourent $\mathbb{R}$ il vient que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \; P([W \leq x] \cap [Z \leq y])$$

$$= \underbrace{P(W \leq x)}_{=\Phi(y)} \cdot \underbrace{P(Z \leq y)}_{=\Phi(y)}$$

D'où l'indépendance de W et Z.

17. (a) $\sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k \rangle a_k$

$$= \sum_{k=1}^{n} \langle x, a_k \rangle a_k - \langle x, a_1 \rangle a_1$$

Comme $(a_1, \dots, a_n)$ est orthonormée $x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, a_k \rangle a_k$

et :

$$\sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k \rangle a_k = x - \langle x, a_1 \rangle a_1$$

$$= x - \cancel{\frac{1}{n}(x_1, \dots, x_n)}$$

$$= x - \underbrace{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}_{=\overline{x}} (1, \dots, 1)$$

$$= (x_1 - \overline{x}, \dots, x_n - \overline{x})$$

(b)

$$\left\langle \sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k \rangle a_k, x \right\rangle$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k \rangle^2 \text{ par linéarité à gauche.}$$

Par (a) :

$$\left\langle \sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k \rangle a_k, x \right\rangle = \langle (x_1 - \overline{x}, \dots, x_n - \overline{x}), (x_1, \dots, x_n) \rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k (x_k - \overline{x})$$

On :

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})^2 = \cancel{\sum_{k=1}^{n} x_k (x_k - \overline{x}) - \overline{x} \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\overline{x} \sum_{k=1}^{n} x_k + n\overline{x}^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x$$

$$\sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k\rangle^2 = \sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k\rangle \langle x, a_k\rangle$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \langle \langle x, a_k\rangle a_k , x \rangle$$

$$= \left\langle \sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k\rangle a_k , x \right\rangle$$

$$= \langle (x_1 - \overline{x}, \dots, x_n - \overline{x}), x \rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k (x_k - \overline{x})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - n\overline{x} \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k}_{= \overline{x}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} 2 x_k \overline{x_n}}_{= 2n\overline{x}^2} + n\overline{x}^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})^2$$

18. (a) Prenons $l = 2$.

$$Y_1 = \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad Y_2 \, a_l = \sum_{k=2}^{2} \langle X, a_k \rangle a_k$$

$$= \left(X_1 - \frac{X_1+X_2}{2}, X_2 - \frac{X_1+X_2}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{X_1 - X_2}{2}, \frac{X_2 - X_1}{2} \right) \text{ par 17.(b)}$$

$$= \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1)$$

Or (a_1, a_2) est orthonormée donc :

en notant $a_2 = (x, y)$, $\langle a_1, a_2 \rangle = 0$ donc $x + y = 0$

Copie anonyme - n°anonymat : 527628

Code épreuve : 283	Nombre de pages : 23	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques 2 approfondies ESCP BS / HEC Paris

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

On $\|a_2\| = 1$ donc $2x^2 = 1$ donc $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ainsi : ~~par unicité de la décomposition dans~~

$$\Big(Y_2 - \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}}\Big)\underbrace{a_2}_{\neq 0_{\mathbb{R}^2}} = 0 \text{ donc } Y_2 = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}}$$

Par le théorème de Cochran :

$Y_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$ et $Y_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$
et elles sont indépendantes donc
on retrouve le résultat de II.

(b) . Si R_1 et R_2 sont indépendantes alors
$Cov(R_1, R_2) = 0$.

• ~~$\beta_1 \neq 0$ et~~ Supposons que $Cov(R_1, R_2) = 0$.

On remarque que, par bilinéarité et symétrie :

$$\beta_1 V(X_1) + \beta_2 V(X_2) + \cancel{Cov}(\beta_1 + \beta_2)\underbrace{Cov(X_1, X_2)}_{=0}$$

$= 0$ donc $\beta_1 V(X_1) = -\beta_2 V(X_2)$

Comme X_1 et X_2 ne sont pas presque sûrement constantes on a nécessairement que $\beta_1 = \beta_2 = 0$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

car sinon, si $\beta_1 \neq 0$ par exemple alors $0 \neq V(X_1) = 0$, donc c'est absurde. Donc il n'existe pas de $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R} \setminus \{0,0\}$ tel que $Cov(R_1, R_2) = 0$

19. (a) Par stabilité par somme et transformation des lois normales (les (X_i) sont indépendants):

$$\overline{X} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} 1\right)$$

$$\Rightarrow \overline{X} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0; \frac{1}{n}\right)$$

(b) $$\overline{X} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot 1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \langle X, a_1 \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} Y_1$$

et par 17. (b): $\sum_{k=2}^{n} Y_k^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$
$= U$

(c) Les $(Y_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont indépendantes donc comme $\bar{X}$ est fonction de Y_1 et U est fonction des $(Y_i)_{i\in[\![2,n]\!]}$ il vient par le lemme des coalitions que $\bar{X}$ et U sont indépendantes.

$$\cancel{\forall i\in[\![1,n]\!],\ \frac{X_i-\bar{X}}{X_i-\bar{X}} = n-1}$$

$$U = \sum_{k=2}^{n} Y_k^2 \quad \text{et} \quad Y_k \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1) \quad \forall k\in[\![2,n]\!]$$

Donc en posant $\forall k\in[\![2,n]\!]$, $Z_{k-1} = Y_k$ on a :

$$U = \sum_{k=1}^{n-1} Z_k^2$$ et on retombe sur la définition donnée

Donc : $U \hookrightarrow \chi^2(n-1)$

20. (a)

signe -

$$\cancel{V = \sum_{i=1}^{n}\left(\sigma\left(\frac{Z_i-\mu}{\sigma}\right)+\mu-\sigma\,\frac{\bar{Z}-n\mu}{\sigma}+n\mu\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}+(n+1)\mu\right)^2}$$

$$U = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Z_i-\mu}{\sigma} - \frac{\sum_{\ell=1}^{n}\left(\frac{Z_\ell}{\sigma}\right) - \frac{n\mu}{\sigma}}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Z_i-\mu-\bar{Z}+\mu\right)^2$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}V$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751