Copie anonyme - n°anonymat : 527628

N5-00077 527628 Mat Appro

Code épreuve : 297 | **Nombre de pages :** 31 | **Session :** 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies EDHEC BS

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1:

1. (a) $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ ~~par produit donc~~ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par produit et on a :

$$\cancel{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \; g'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \; g'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)}{x^2}$$

$$= \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

On, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{1-\ln(x)}{x^2} \geq 0 \iff e \geq x \quad \text{par croissance de exp}$$

D'où :

x	0		e		$+\infty$
Signe de $g'(x)$			0		
Variations de g	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

$g(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$

$g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, par croissances comparées

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. Comme $3 \geq e \simeq 2,718$ il vient, par décroissance de g sur $[e, +\infty[$:

$$\frac{\ln(n)}{n} = g(n) \geq g(n+1) = \frac{\ln(n+1)}{n+1}, \text{ car } n+1 \geq n \geq 3 \geq e$$

Donc $\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)_{n \geq 3}$ est décroissante.

Par décroissance de la suite :

$$\forall n \geq 4, \quad \frac{\ln(n)}{n} \leq \frac{\ln(4)}{4} = \frac{\ln(2^2)}{4} = \frac{2 \cdot \ln(2)}{2 \cdot 2} = \frac{\ln(2)}{2}$$

2. (a) $x \mapsto x - m$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ sur $]m;+\infty[$ donc, puisque $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \ln(x-m)$ est dérivable sur $]m;+\infty[$. Par ~~po~~ composition, produit et somme de fonctions dérivables, f_m est dérivable ~~sur $\mathbb{R}_+^*$~~ $]m;+\infty[$ sur ~~$\mathbb{R}_+^*$~~ $]m;+\infty[$ et :

$$\cancel{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f_m'(x) = \ln(x) + \frac{x-m}{x}}$$

$$\forall x \in]m;+\infty[, \ f_m'(x) = \ln(x) + \frac{x-m}{x} - \ln(x-m) - \frac{x}{x-m}$$

$$= \ln\left(1 + \frac{m}{x-m}\right) + x^2 - mx$$

$$= \ln\left(1 + \frac{m}{x-m}\right) + \frac{(x-m)^2 - x^2}{x(x-m)}$$

$$= \ln\left(1 + \frac{m}{x-m}\right) - m\frac{2x-m}{x(x-m)}$$

(b) La fonction $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. En particulier, sa courbe représentative est en-dessous de sa tangente ~~au~~ en 1. Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ \ln(t) \leq \ln'(1)(t-1) + \ln(1) = t-1$$

Ainsi :

$$\forall t \in]m,+\infty[, \ f_m'(x) = \ln\left(1+\frac{m}{x-m}\right) - m\,\frac{2x-m}{x(x-m)}$$

$$\leq \left(1+\frac{m}{x-m}\right) - 1 - m\,\frac{2x-m}{x(x-m)}$$

$$\leq \frac{mx - 2mx + m^2}{x(x-m)}$$

$$\leq \frac{m(m-x)}{x(x-m)} = -\frac{m}{x} < 0$$

Donc f_m est strictement décroissante sur $]m;+\infty[$.

(c) f_m est strictement décroissante sur $]m;+\infty[$ donc aussi sur $[m+1;m+2]$ où elle est continue (car dérivable sur $]m;+\infty[$. Par le théorème de la bijection :

f_m réalise une bijection de $[m+1;m+2]$ sur $[f_m(m+2);f_m(m+1)]$

$$= [2\ln(m+2)-(m+2)\ln 2; \ln(m+1)]$$

On : $\dfrac{f_m(m+2)}{m+2} = 2\dfrac{\ln(m+2)}{m+2} - \ln(2) \leq \underbrace{2\dfrac{\ln(2)}{2} - \ln(2)}_{\leq 0}$, par 1.(b) car $m+2 \geq 4$

et : $\ln(m+1) \geq \ln(1) = 0$ car $m+1 \geq 1$

Ainsi $0 \in [f_n(n+2) ; f_n(n+1)]$ et donc il existe une solution de l'équation $f_n(x) = 0$ pour $x \in [n+1 ; n+2]$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$:

$$n+1 \leq x_n \leq n+2$$

Donc :

$$\underbrace{1 + \frac{1}{n}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0} \leq \frac{x_n}{n} \leq \underbrace{1 + \frac{2}{n}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$$

Donc par le théorème d'encadrement :

$$\frac{x_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \quad \text{donc } x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n$$

4.(a) $\forall n \geq 2$, $f_n(x) = 0$ donc $(x_n - n)\ln(x_n) = x_n \ln(x_n - n)$

donc $(x_n - n)\dfrac{\ln(x_n)}{x_n} = \ln(x_n - n)$, car $x_n > 0$

(b) $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$ donc $x_n \to +\infty$ donc par croissances comparées :

$$\frac{\ln(x_n)}{x_n} \xrightarrow[+\infty]{} 0$$

De plus : $1 \leq x_n - n \leq 2$ pour tout $n \geq 2$.

Donc : $0 \leq \dfrac{\ln(x_n)}{x_n} \leq (x_n - n)\dfrac{\ln(x_n)}{x_n} \leq 2\dfrac{\ln(x_n)}{x_n}$

Par le théorème d'encadrement :

$$(x_n - n)\frac{\ln(x_n)}{x_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

exp est continue en 0 donc :

Copie anonyme - n°anonymat : 527628

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 31 | Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies EDHEC BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$x_n - n = \exp(\underbrace{\ln(x_n - n)}_{=(x_n-n)\frac{\ln x_n}{x_n}}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(0) = 1$

~~(b)~~

5. (a) $x_n - n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi : $\ln(1+u_n) = u_n + o_{+\infty}(u_n)$

Donc : $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$

De plus :

$\ln(1+n+u_n) = \ln(x_n) = \ln(n + o_{+\infty}(n))$, car $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$

$= \ln(n(1+o_{+\infty}(\frac{1}{n}))$

$= \ln(n) + \underbrace{\ln(\underbrace{1+o_{+\infty}(\frac{1}{n})}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1})}_{\to 0}$

~~$= \ln(n) + o_{+\infty}(\ln(n))$~~

$= \ln(n) + o_{+\infty}(1)$

$= \ln(n) + o_{+\infty}(\ln(n))$, car $\ln(n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Donc : $\ln(x_n) \sim \ln(n)$

(b) Par 4. (a) :

$$\ln(1+u_n) = \underbrace{(u_n+1)}_{\to 1} \frac{\ln(1+n+u_n)}{x_n \cancel{1+n+u_n}}$$

Donc :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{x_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n} \quad \text{car } x_n \underset{+\infty}{\sim} n$$

6. Pour tout $n \geq 3$:

$$\frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{\ln(e)}{n} \geq \frac{1}{n} \geq 0$$

Donc par critère de comparaison sur les séries à termes positifs $\sum_{n\geq 2} \frac{\ln(n)}{n}$ diverge car la série harmonique diverge. Par critère d'équivalence sur les séries à termes positifs : $\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge.

• $n^{3/2} \frac{(\ln(n))^2}{n^2} = \frac{(\ln(n))^2}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées

Or, par critère de Riemann ($3/2 > 1$) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge. Donc par critère de négligeabilité sur les séries à termes positifs $\sum_{n\geq 2} \frac{(\ln(n))^2}{n^2}$ converge.

Par critère d'équivalence sur les séries à termes positifs ($u_n^2 \sim \frac{(\ln(n))^2}{n^2}$ par exponentiation) :

$$\sum_{n\geq 2} u_n^2 \text{ converge.}$$

Exercice 2 :

1.(a) Soit $x \in F$.

$$\cancel{\|p(x)\|^2 = \|\underbrace{p(x)-x}_{\in \ker p} + \underbrace{x}_{\in \mathrm{Im}}\|^2}$$

$$\underset{\text{car } p \text{ projette sur } F \text{ et } x\in F}{p(x)=x} \text{ donc } \|p(x)\| = \|x\|$$

Donc $F \subset \{x \in E, \|p(x)\| = \|x\|\}$.

(b) Soit $x \in E$.

$$\|x\|^2 = \|x - p(x) + p(x)\|^2$$

On $x - p(x) \in \ker p = F^{\perp}$ et $p(x) \in \mathrm{Im}\, p = F$ donc puisque p est orthogonal et par le théorème de Pythagore :

$$\|x\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2,$$ $x - p(x)$ et $p(x)$ sont orthogonaux

(c) Soit $x \in \{y \in E, \|p(y)\| = \|y\|\}$. Alors :

$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2$$

Donc :

$$\cancel{\|p} \ \|x - p(x)\|^2 = 0 \text{ donc } \|x - p(x)\| = 0$$

donc $x = p(x)$, par définition du produit scalaire

donc $x \in \mathrm{Im}\, p = F$

Ainsi : $F \supset \{x \in E, \|p(x)\| = \|x\|\}$

Par double inclusion :

$$\underline{F = \{ x \in E, \|p(x)\| = \|x\| \}}$$

Pour tout $x \in E$, la croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$ donne :

$$\|x\|^2 = \underbrace{\|x - p(x)\|^2}_{\geq 0} + \|p(x)\|^2 \geq \|p(x)\|^2$$

puis $\underline{\|x\| \geq \|p(x)\|}$

2. (a) Soit $y \in F_1 \cap F_2$. Alors :

$$p_3(y) = p_1 \circ p_2(y) = p_1(y), \text{ car } y \in F_2$$
$$= y, \text{ car } y \in F_1$$

Donc $y \in \operatorname{Im} p_3 = F_3$. Donc $\underline{F_1 \cap F_2 \subset F_3}$.

(b) • p_2 est un projecteur orthogonal sur un sous-espace vectoriel de E donc le résultat de 1. (c) assure que :

$$\underline{\|x\| \leq \|p_2(x)\|}$$

• D'autre part :

$$\|x\| = \|p_3(x)\| = \|p_1 \circ p_2(x)\| = \|p_1(p_2(x))\|$$
$$\underline{\leq \|p_2(x)\|}, \text{ car } p_1 \text{ est un projecteur orthogonal et par 1.(c)}$$

Ainsi : $\|x\| = \|p_2(x)\|$ donc $\underline{x \in F_2}$ par 1.(c).

Alors : $x = p_3(x) = p_1 \circ p_2(x) = p_1(x)$, car $x \in F_2$

Ainsi : $x \in \operatorname{Im} p_1 = F_1$

(c) La question précédente donne l'inclusion :

$$F_3 \subset F_1 \cap F_2$$

Par double inclusion :

$$F_1 \cap F_2 = F_3$$

(d) p_3 est un projecteur orthogonal donc symétique d'où :

$$\forall (x,y) \in E^2, \langle p_3(x), y \rangle = \langle x, p_3(y) \rangle$$

$p_3 = p_1 \circ p_2$ donc :

$$\forall (x,y) \in E^2, \langle p_1 \circ p_2(x), y \rangle = \langle p_2(x), p_1(y) \rangle, \text{ car } p_1 \text{ est symétique}$$

$$\cancel{= \langle p}$$

$$= \langle x, p_2 \circ p_1(y) \rangle, \; p_2 \text{ est symétique}$$

$$= \langle x, p_3(y) \rangle, \text{ car}$$

$<p_1 \circ p_2(x), y> = < x, p_3(y)>$

$= < p_1(x), p_2(y)>$ car p_1 est symétrique

$= < p_2 \circ p_1(x), y >$ car p_2 est symétrique.

(c) On a alors, pour $x \in E$:

$< p_1 \circ p_2(x), p_1 \circ p_2(x) - p_2 \circ p_1(x)>$

$= < p_2 \circ p_1(x), p_1 \circ p_2(x) - p_2 \circ p_1(x)>$

Donc par linéarité à droite de $<\cdot,\cdot>$:

$\|p_1 \circ p_2(x) - p_2 \circ p_1(x)\|^2 = 0$

Donc :

$\forall x \in E, \ p_1 \circ p_2(x) - p_2 \circ p_1(x) = 0_E$

Donc :

~~$\forall x$~~ $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$

3. (a) Soit $x \in E$.

$p^2(x) = p_1 \circ p_2 \circ p_1 \circ p_2(x) = p_1 \circ (p_1 \circ p_2) \circ p_2(x)$

$= p_1^2 \circ p_2^2(x)$

$= p_1 \circ p_2(x) = p(x)$

Donc p est un projecteur de E.

(b) Pour tout $x, y \in E$:

$$\langle p(x), y \rangle = \langle p_1 \circ p_2(x), y \rangle$$

$$= \langle p_2(x), p_1(y) \rangle \text{ car } p_1 \text{ est symétrique}$$

$$= \langle x, p_2 \circ p_1(y) \rangle \text{ car } p_2 \text{ est symétrique}$$

$$= \langle x, p(y) \rangle \text{ car } p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$$

Donc p est symétrique.

(c) p est orthogonale car symétrique. ~~Posons $G = F_1 \cap F_2$.~~
Par définition de p on a que $F_1 \cap F_2 \subset \operatorname{Im} p$.
Soit $x \in \operatorname{Im} p$. Alors il existe $y \in E$ tel que :

. $x = p(y) = p_1 \circ p_2(y)$ donc $x \in \operatorname{Im} p_1 = F_1$

. et : $x = p(y) = p_2 \circ p_1(y)$ donc $x \in \operatorname{Im} p_2 = F_2$

Donc $x \in F_1 \cap F_2$. Ainsi $\operatorname{Im} p = F_1 \cap F_2$.

~~p projette orthogonalement~~
p est le projecteur orthogonal sur $F_1 \cap F_2$.

Donc $p = p_3$.

4. On a montré dans 1. que : $p_1 \circ p_2 = p_3 \Rightarrow p_1$ et p_2 commutent.
On a montré dans 2. que : p_1 et p_2 commutent $\Rightarrow p_1 \circ p_2 = p_3$

D'où : p_1 et p_2 commutent $\iff p_1 \circ p_2 = p_3$

Exercice 3 :

1. . f est positive sur $\mathbb{R}$.

. f est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ par produit et est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est continue sur $\mathbb{R}^*$. $(\mathbb{R}\setminus\{0\})$

. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\int_{-A}^{A} f(x)\,dx = \int_{-A}^{0} -2x\cdot e^{-x^2}\,dx$$

$$= \left[e^{-x^2} \right]_{-A}^{0}$$

$$= \cancel{1 + - \lim_{A-}}$$

$$= 1 - e^{-A^2} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

f peut être considérée comme une densité de probabilité.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^-$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$$= e^{-x^2} - \lim_{x\to-\infty} e^{-x^2}$$

$$= e^{-x^2}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$: $F(x) = 1$ car $X(\Omega) =]-\infty ; 0]$.

3. Une densité d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$ est :

$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\frac{\sqrt{2}}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\cdot\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\pi} e^{-x^2}$$

4. Une variable aléatoire Y suivant une loi normale $\mathcal{N}(0,\frac{1}{2})$ admet ~~une espérance~~ un moment d'ordre 2 avec :

$$\cancel{E(Y) = 0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2}\,dx}$$

$E(Y^2) = E(Y^2) - (E(Y))^2$, par la formule de Koenig-Huygens
ceci vaut $V(Y)$

$$= V(Y)$$

$$(\approx) = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx \text{, par le théorème de transfert}$$

$$(*) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0} x^2 e^{-x^2}\,dx \text{, parité de l'intégrande}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0} x f(x)\,dx$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

$(*)$ Assure que $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$ converge absolument. Par le théorème de transfert :

$E(Y^2) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} E(X)$ d'où $E(X) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}$ par $(\approx)$

5. Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

$$G(x) = P(Z \leq x)$$
$$= P(X^2 \leq x)$$
$$= P(|X| \leq \sqrt{x})$$, car $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$
$$= P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x})$$
$$= \underbrace{F(\sqrt{x})}_{=1} - F(-\sqrt{x})$$, car X est à densité

Pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$: $G(x) = 0$

Par composition on a que G est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et G est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-^*$. De plus G est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$. Z est donc à densité et une densité g est obtenue par dérivation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ g'(x) = \cancel{\frac{1}{2\sqrt{x}} f(\sqrt{x}) - \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) f(-\sqrt{x})}$$

$$\cancel{= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 2\sqrt{x}\, e^{-x}}$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}} f(-\sqrt{x})\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 2\sqrt{x}\, e^{-x}$$

$$= e^{-x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \ g'(x) = 0$$

La densité caractérise la loi donc comme on reconnaît la densité d'une loi exponentielle de paramètre 1 :

$$Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$$

6. $E(Z) = E(X^2) = 1$. Ainsi X admet un moment d'ordre 2 donc une variance et par la formule de Koenig-Huygens:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= 1 - \frac{\pi}{16}$$

7.

```
def simulX(m):
    M = np.zeros(m)
    for i in range(m):
        M[i] = - np.sqrt(rd.exponential(1))
    return M
```

car X est à valeurs négatives

~~8.~~

~~def EsperanceX(m):~~
~~S = 0~~
~~for i in range(m):~~
~~S+ = M~~

~~def EsperanceX(m):~~
~~S = 0~~
~~for i in range(m):~~
~~S+ =~~

```
def EsperanceX(m):
    M = simulX(m)
    S = 0
    for i in range(m):
        S+ = M[i]
    E = S/m
    return E
```

8\. • h est positive sur $\mathbb{R}$.

• h est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0 ; 1\}$.

• $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx = \int_0^1 2(1-x)\,dx$

$$= \left[2x - x^2\right]_0^1$$

$$= 2 - 1 = 1$$

h peut être considérée comme une densité.

9\. • Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$: $H(x) = 0$

• Soit $x \in \,]1 ; +\infty[$: $H(x) = 1$

• Soit $x \in [0 ; 1]$: $H(x) = \displaystyle\int_0^x h(t)\,dt$

$$= \left[2t - t^2\right]_0^x$$

$$= 2x - x^2$$

10\. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(T_n \leq x) = P(\sqrt{n}(M_n - 1) \leq x)$$

$$= P\left(M_n - 1 \leq \frac{x}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= P\left(M_n \leq \frac{x}{\sqrt{n}} + 1\right)$$

$$= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \left[Y_i \leq 1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right]\right), \text{ par égalité d'événements}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \underbrace{P\left(Y_i \leq 1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)}_{= H\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)}, \text{ par indépendance}$$

$$= \left[H\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right]^n, \text{ par égalité en loi}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 527628

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 31	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies EDHEC BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

11. Soit $y \in \mathbb{R}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(1+\frac{y}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1+\frac{y}{n}\right)}$$

On $\frac{y}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc ~~$\ln\left(1+\frac{y}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$~~

$$\ln\left(1+\frac{y}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{y}{n}$$

Donc $n \ln\left(1+\frac{y}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} n \cdot \frac{y}{n} = y$

exp est continue sur $\mathbb{R}$ donc :

$$\left(1+\frac{y}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^y$$

12. ~~So~~ T_n est presque sûrement à valeurs ~~dans~~ négatives donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F_n(x) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 = F(x)$$

Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$.

$$F_n(x) = \left[H\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right]^n$$

Pour n suffisamment grand $1+\frac{x}{\sqrt{n}} \in [0;1]$ donc :
$\left(\frac{x}{\sqrt{n}} \to 0\right)$

(n suffisamment grand)

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, F_n(x) = \left[2\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^2\right]^n$$

$$= \left(2 + 2\frac{x}{\sqrt{n}} - 1 - 2\frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{x^2}{n}\right)^n$$

$$= \left(1 + \frac{-x^2}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-x^2} = F(x)$$

$(T_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers X.

Problème:

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$

$$\cancel{= \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{4}\right) \times \prod_{k=}}$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{4}\right) \times \frac{1\times 2\times\ldots\times n\times\ldots\times 2n}{n!\times 1\times 2\times\ldots\times n}$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{4}\right) \times \frac{(n+1)\times\ldots\times 2n}{n!}$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{4}\right) \times \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{n+j}{j}\right)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \frac{k+n}{4k}$$

$$B_0 = 1 = \prod_{k=1}^{0} \frac{k+n}{4k}$$

```
def B(n):
    p = 1
    for k in range(n):
        p = p*(k+n)/(4*k)
```

2. $W_0 = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^0 \, dt$

$$= [t]_0^{\pi/2} = \pi/2$$

$$W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t)dt = [-\cos(t)]_0^{\pi/2}$$

$$= 0 - (-1)$$

$$= 1$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n (\sin(t) - 1)\, dt$$, par linéarité de l'intégrale

$t \mapsto \sin(t)$ est positive sur $[0; \pi/2]$ donc $t \mapsto \sin(t)^n$ aussi. $\sin$ est ~~dan~~ à valeurs dans $[0;1]$ donc $\forall t \in [0; \pi/2]$, $\sin(t) - 1 \leq 0$. Comme les bornes sont dans le bon sens, la positivité de l'intégrale donne :

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin(t)^n}_{\geq 0} \underbrace{(\sin(t) - 1)}_{\leq 0} dt \leq 0$$

$(W_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\cancel{W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n \cdot \sin(t)^2 \, dt}$$

$$\cancel{= \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n \cdot (1 - \cos(t))^2 dt}$$

$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^{n+1} \cdot \sin(t)\, dt$$

En intégrant par parties ($t \mapsto \sin(t)^{n+1}$ et $t \mapsto -\cos(t)$ sont C^1 sur $[0; \pi/2]$) :

$$W_{n+2} = \underbrace{\Big[-\cos(t)\sin(t)^{n+1}\Big]_0^{\pi/2}}_{=0} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin(t)^{n} \cdot \cos(t)^2\, dt$$

$$= (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin(t)^{n}\left(1 - \sin(t)^2\right) dt$$

$$= (n+1) W_n - (n+1) W_{n+2}, \text{ linéarité}$$

Donc :

$$(n+2) W_{n+2} = (n+1) W_n$$

Donc : $$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_n > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$W_{2n} = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{W_{2(k+1)}}{W_{2k}}\right) \cdot W_0, \text{ par télescopage}$$

$$= \frac{\pi}{2} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2k+2}, \text{ par 4.}$$

$[j = k+1]$

$$= \frac{\pi}{2} \prod_{j=1}^{n} \frac{2j-1}{2j}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{2j(2j-1)}{4j^2}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4^n} \cdot \underbrace{\frac{1}{(n!)^2} \cdot (2n)!}_{= \binom{2n}{n}}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot B_n$$

$$W_{2\cdot 0} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\pi} = B_0$$

* $m \in \mathbb{N}$

$$\cdot W_{2m+1} = \prod_{k=1}^{m} \frac{W_{2k+1}}{W_{2k-1}} \text{, par télescopage}$$

$$= \prod_{k=1}^{m} \frac{2k}{2k+1} \text{, par 4.}$$

$$= \frac{1}{(2m+1)\left(\prod_{k=1}^{m-1} \frac{2k+1}{2k}\right) \times \frac{1}{2m}}$$

$$= \frac{1}{(2m+1)\cdot \prod_{k=1}^{m-1} \frac{(2k+1)2k}{(2k)^2}}$$

$$= \frac{1}{(2m+1)\cdot \frac{1}{4^m}\frac{(2m)!}{(m!)^2}}$$

$$= \frac{1}{(2m+1)\, B_m}$$

6. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $m-1 \in \mathbb{N}$ et :

$$W_{2m-1} = W_{2(m-1)+1} = \frac{1}{(2m-1)\cdot B_{m-1}}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$= \cancel{\frac{1}{\quad}}$

On :

$$(2n-1)B_{n-1} = (2n-1)\cdot \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k+n-1}{4k}$$

$$= (2n-1)\cdot\frac{1}{4^{n-1}}\cdot\frac{(2(n-1))!}{(n-1)!\cdot(n-1)!}$$

$$= \frac{1}{4^{n-1}}\ \frac{(2n)!}{2n\cdot(n-1)!\cdot(n-1)!}$$

$$= \frac{2n}{4^n}\ \frac{(2n)!}{n!\cdot n!}$$

$$= 2n\cdot B_n$$

D'où : $W_{2n-1} = \frac{1}{2nB_n}$

7. $(W_n)_{n\geq 0}$ est décroissante donc :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad W_{2n+1}\leq W_{2n}\leq W_{2n-1}$

d'où $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \frac{1}{(2n+1)B_n}\leq \frac{\pi}{2}B_n\leq\frac{1}{2nB_n}$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $B_n>0$ donc :

$$\frac{1}{2n+1} = \frac{B_n}{(2n+1)B_n}\leq\frac{\pi}{2}B_n^2\leq\frac{B_n}{2nB_n} = \frac{1}{2n}$$

Par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2n+1}} \leq B_n \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$$

$\sqrt{2n+2} \geq \sqrt{2n+1}$ donc par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2(n+1)}} \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2n+1}} \leq B_n \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$$

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{\pi}\sqrt{n}\,B_n \leq 1$$

On $\sqrt{\pi}\sqrt{n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\pi}\sqrt{n+1}$ donc $\frac{\sqrt{n\pi}}{\sqrt{\pi(n+1)}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

Par le théorème d'encadrement :

$$\sqrt{\pi n}\,B_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \text{ donc } \cancel{B_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi_n}}}$$

$$B_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

9. (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $Y_k(\Omega) = \{0; 1\}$ ~~de~~

et $\underbrace{P(Y_k = 1) = P(X_k = 1)}_{\text{car } X_k \text{ suit une loi de probabilité}} = \frac{1}{2}$ donc $Y_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*, E(Y_k) = \frac{1}{2}$ et $V(Y_k) = \frac{1}{4}$

(b) Les $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes par le lemme des coalitions car les $(X_k)_{k\geq 1}$ le sont donc comme :

$$T_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k+1}{2} = \sum_{k=1}^{n} Y_k$$

On a que $T_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$ car $\forall k\in\mathbb{N}^*, Y_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

(c) ~~Notons~~ Soit $\omega\in\Omega$. Notons j le nombre de $(X_k(\omega))_{k\in[\![1,n]\!]}$ ~~telles~~ tels que $X_k(\omega) = 1$.
~~Donc~~ $j\in[\![0,n]\!]$ nécessairement.
Il y a donc "$n-j$" $(X_k(\omega))_{k\in[\![1,n]\!]}$ tels que $X_k(\omega) = -1$.

Donc $S_k(\omega) = \cancel{j+}\, j-(n-j) = 2j-n$

Ainsi $S_n(\Omega) = \{2j-n,\ j\in[\![0;n]\!]\}$.

Pour tout $k\in S_n(\Omega)$:

$$P(S_n = k) = P\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n} X_\ell = \frac{k+n}{2}\right)$$

$$= P\left(T_n = \frac{k+n}{2}\right)$$

$$= \binom{n}{\frac{k+n}{2}} \frac{1}{2^n}$$

10. (a) Pour que $S_k(\omega) = 0$ (avec $\omega\in\Omega$ et $k\in[\![1;2n]\!]$, il faut que l'on ait autant de $(X_j(\omega))_{j\in[\![1,k]\!]}$ qui valent 1 que de $(X_j(\omega))_{j\in[\![1,k]\!]}$ qui valent -1. En particulier k est donc pair. Ainsi $R_n = \mathrm{Card}(\{k\in[\![1,2n]\!], S_k = 0,$ k pair $\})$

Copie anonyme - n°anonymat : 527628

Emplacement QR Code	
	Code épreuve : 297 — **Nombre de pages :** 31 — **Session :** 2025
	Épreuve de : Maths approfondies EDHEC BS
	Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc $R_m = \mathrm{Card}\left(\{ k \in [\![1, m]\!], \ S_{2k} = 0 \} \right)$

(b) $P(S_{2k} = 0) = \binom{2k}{k} \frac{1}{2^{2k}}$, par g.c.

$= \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} = B_k$

(c) $R_m = \sum_{k=1}^{m} \mathbb{1}_{A_k}$ car $\forall \omega \in \Omega$, $\sum_{k=1}^{m} \mathbb{1}_{A_k}(\omega) = \sum_{\substack{k=1 \\ \omega \in A_k}}^{m} 1$

$= \mathrm{Card}\left(\{ k \in [\![1, m]\!], \ S_{2k}(\omega) = 0 \} \right)$

(d) $E(R_m) = \sum_{k=1}^{m} E(\mathbb{1}_{A_k})$, par linéarité

$= \sum_{k=1}^{m} P(A_k)$

$= \sum_{k=1}^{m} P(S_{2k} = 0)$

$= \sum_{k=1}^{m} B_k$, par 10.(b).

11. On a :

$\forall x \in [k ; k+1]$, ~~$\forall y \in [k-1 ; k]$~~,

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}} \leq \frac{1}{2\sqrt{y-1}}$$

Donc en intégrant sur $[k ; k+1]$, par croissance de l'intégrale ($k+1 \geq k$) :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{2\sqrt{k}} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{2\sqrt{y-1}}\,dy$$

Donc :

$$\left[\sqrt{x}\right]_k^{k+1} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}} \leq \left[\sqrt{y-1}\right]_k^{k+1}$$

D'où :

$$2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)$$

12. Par 7. :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k+1}} \leq B_k$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k}}$$

$$\leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)$$

En sommant pour $k \in [\![1, n]\!]$ et par télescopage :

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{2}\right) \leq E(R_n) \leq \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$$

On : $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{n+1}-2\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

Et :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{n+1}-2\right) \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} E(R_n) \leq 1$$

donc par le théorème d'encadrement :

$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} E(R_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc ~~$E(R_n) \underset{+\infty}{\sim} 2\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$~~

~~$2\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$~~

$$E(R_n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$$

13. (a) Par 8. :

$$B_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

Donc :

~~$\frac{1}{4^n} \quad \frac{1}{\quad}$~~

Donc :

$$B_n\sqrt{n\pi} \sim 1$$

Mais aussi :

$\frac{1}{B_n\sqrt{n\pi}} \sim 1$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en 1

Donc :

$$4^n \cdot \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sim \sqrt{n\pi} \text{ d'où } \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sim \frac{\sqrt{n\pi}}{4^n}$$

(b) Soit $x \in [0;4[$.

~~$\forall n \in \mathbb{N}^*$~~

~~$0 \leq \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$~~

$$\frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n\pi}\left(\frac{x}{4}\right)^n$$

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \underbrace{\sqrt{n\pi}}_{\geq 1}\left(\frac{x}{4}\right)^n \leq \pi \cdot \frac{x}{4} \cdot n\left(\frac{x}{4}\right)^{n-1}$

On : $\sum_{n \geq 1} n\left(\frac{x}{4}\right)^{n-1}$ converge comme série géométrique dérivée première car $\frac{x}{4} \in]-1;1[$. Par critère de comparaison puis d'équivalence sur les séries à termes positifs :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \text{ converge}$$

14. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x, y \in [0;4[$ avec $y > x$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{\binom{2k}{k}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{y^k}{\binom{2k}{k}}$$, par croissance de $t \mapsto t^k$ sur $\mathbb{R}_+$ pour $k \in$ ~~$[\![1,n]\!]$~~ $\mathbb{N}^*$

Par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$:

$$f(x) \leq f(y)$$

Donc f est croissante.

15. (a) Soient $x \in [0;4[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Par 7. :

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 31 | Session : 2025

Épreuve de : Maths approfondies EDHEC BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$$

Par passage à l'inverse :

$$\frac{1}{4^n}\sqrt{\pi}\sqrt{n+1} \geq \frac{1}{\binom{2n}{n}} \geq \frac{1}{4^n}\sqrt{\pi}\sqrt{n}$$

$x^n \geq 0$ donc : $(x \geq 0)$

$$\left(\frac{x}{4}\right)^n\sqrt{\pi}\sqrt{n+1} \geq \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \geq \left(\frac{x}{4}\right)^n\sqrt{\pi}\underbrace{\sqrt{n}}_{\geq 1}$$

$$\geq \left(\frac{x}{4}\right)^n\sqrt{\pi}$$

(b) En reconnaissant des séries géométriques et géométriques dérivée première :

- $$\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{4}\right)^n = \sqrt{\pi}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{4}} - 1\right) = \sqrt{\pi}\,\frac{x}{4-x}$$

$$\cancel{\Rightarrow \sqrt{\pi}\,\frac{4}{4-x} \geq \sqrt{\pi}\,\frac{x}{4-x}}$$

- $$\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{n}\,(n+1)\left(\frac{x}{4}\right)^n = \sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{x}{4}\right)^{n-1} = \cancel{\sqrt{\pi}\left(\frac{4}{4-x}\right)}$$

$$\sqrt{\pi}\,\frac{1}{\left(1-\frac{x}{4}\right)^2}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\cdot \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \sqrt{\pi}\,(m+1)\left(\frac{x}{4}\right)^m = \sqrt{\pi}\left(\sum_{m=1}^{+\infty} m\left(\frac{x}{4}\right)^{m-1}\cdot\frac{x}{4} + \frac{4}{4-x}\cdot 1\right)$

$$= \sqrt{\pi}\left(\frac{x}{4}\,\frac{1}{(1-x/4)^2} + \frac{x}{4-x}\right)$$

Donc en sommant pour $k \in [\![1, m]\!]$ l'inégalité précédente $(m \in \mathbb{N}^*)$, puis en passant à la limite lorsque m tend vers $+\infty$:

$$\sqrt{\pi}\,\frac{x}{4-x} = \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} \sqrt{\pi}\left(\frac{x}{4}\right)^m \leq f(x) = \lim_{m\to+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^m}{\binom{2m}{m}}$$

$$\leq \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} \sqrt{\pi}\,(m+1)\left(\frac{x}{4}\right)^m$$

$$\leq \sqrt{\pi}\left(\frac{x}{4}\,\frac{1}{(1-x/4)^2} + \frac{x}{4-x}\right)$$

Par le théorème de l'encadrement il vient que :

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

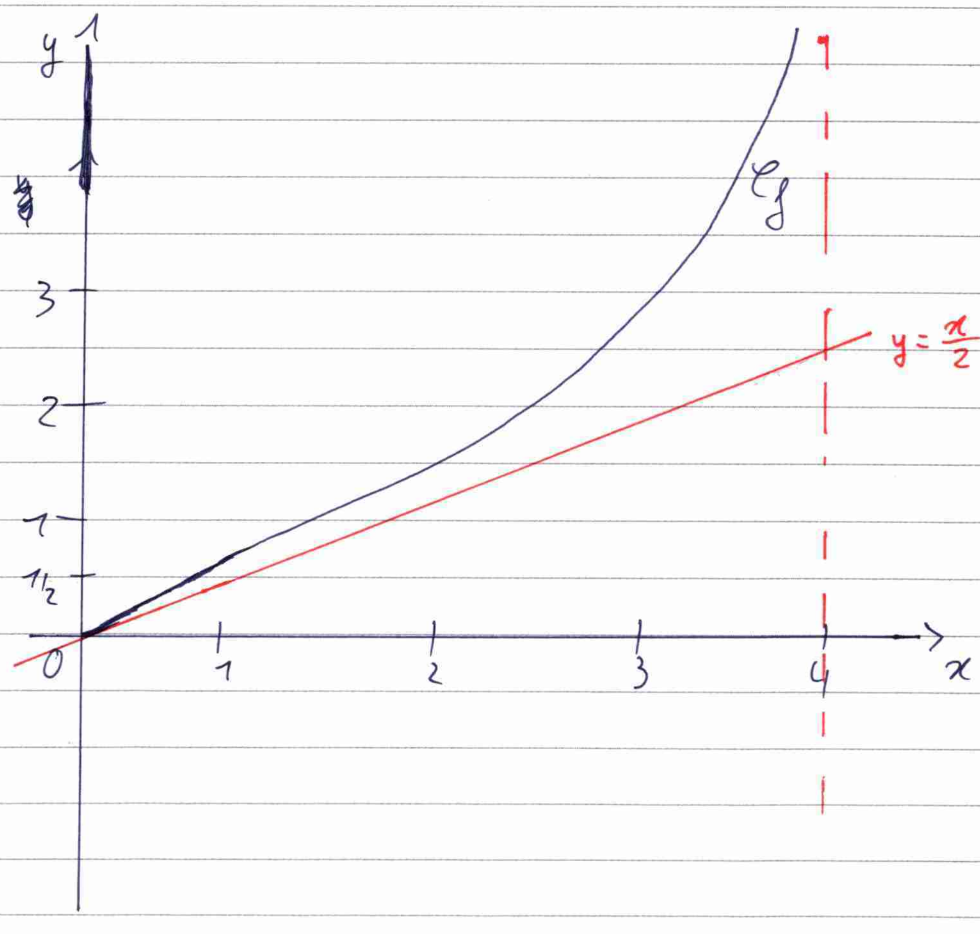
Par le théorème de comparaison:

$$f(x) \underset{x\to 4^-}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{car} \quad \frac{x}{4-x} \underset{x\to 4^-}{\longrightarrow} +\infty$$

Ainsi, comme f est continue sur $]0;4[$ on ~~peut prolonger f.~~ a que f est continue sur $[0;4[$ car $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$.

16. Une étude de fonction devrait montrer que $\forall x$ $\frac{x}{4-x} - \frac{x}{2} \geq 0$ $\forall x \in [0;4[$ ce qui conclut par l'inégalité de gauche dans 15. (b).

17.



IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751