Copie anonyme - n°anonymat : 527628

N5-00077 527628 Mat Appro

Code épreuve : 295 | **Nombre de pages :** 28 | **Session :** 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies EM Lyon

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Problème 1 :

1. $t \mapsto 1-t^2$ est continue sur $[0;1]$ par somme de fonctions continues sur $[0;1]$. Ainsi, puisque $t \mapsto t^n$ est continue sur $[0;1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a par composition que $t \mapsto (1-t^2)^n$ ~~I_n~~ l'est aussi. Donc :

$\forall n \in \mathbb{N}$, I_n converge

Faisons le changement de variable $u = -t$ de classe C^1 et strictement décroissant sur $[0;1]$:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{-1} (1-u^2)^n(-du)$ converge et vaut $\int_{-1}^0 (1-u^2)^n du$

et vaut aussi $\int_0^1 (1-t^2)^n du$
$= I_n$

Donc, par la relation de Chasles :

$\forall n \in \mathbb{N}$, J_n converge et vaut $\int_0^1 (1-t^2)^n dt + \int_{-1}^0 (1-u^2)^n du$

$= 2 I_n$

2. $I_0 = \int_0^1 (1-t^2)^0 dt = [t]_0^1 = 1$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} dt - \int_0^1 (1-t^2)^n dt$

D'où : $I_{m+1} - I_m = \int_0^1 (1-t^2)^m (1-t^2-1)\,dt$, par linéarité de l'intégrale

$= -\int_0^1 t^2(1-t^2)^m \,dt$

On pour tout $t \in [0;1]$: $0 \leq t^2 \leq 1$ donc $1-t^2 \geq 0$
donc $(1-t^2)^m \geq 0$

Par positivité de l'intégrale il vient donc :

$$I_{m+1} - I_m = - \underbrace{\int_0^1 t^2(1-t^2)^m dt}_{\geq 0} \leq 0$$

Donc $(I_m)_{m\geq 0}$ est décroissante.

4. Soit $m \geq 1$. Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto (1-t^2)^m$ sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ (par composition pour la deuxième).
Donc en intégrant par parties :

$$I_m = \int_0^1 (1-t^2)^m dt = \underbrace{\left[t(1-t^2)^m\right]_0^1}_{=0} - \left(-\int_0^1 2t^2(1-t^2)^{m-1} dt\right)$$

$$= 2\int_0^1 t^2(1-t^2)^{m-1} dt$$

$$= -2\left(I_m - I_{m-1}\right) \text{ par le calcul de 3.}$$

4. Soit $m \geq 1$. La formule du binôme de Newton donne :

$$I_m = \int_0^1 (1-t^2)^m dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^m t^{2m} dt$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}$$

5

4. Par le calcul précédent $(m \geq 1)$:

$$I_n - I_{n-1} = -\int_0^1 t^2(1-t^2)^{n-1}\,dt$$

$t \mapsto t$ et $t \mapsto \frac{(1-t^2)^n}{2n}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ (par composition pour la deuxième) donc par intégration par parties :

$$I_n - I_{n-1} = \underbrace{\left[t \quad \frac{(1-t^2)^n}{2n} \right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \frac{(1-t^2)^n}{2n}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2n} I_n$$

D'où :

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2n} + 1\right)}_{=\frac{2n+1}{2n}} I_n = I_{n-1}$$

Donc :

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$$

5. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: « $I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$ »

Initialisation :

$$I_0 = 1 = \frac{\overbrace{(2^0 \cdot 0!)^2}^{=1}}{\underbrace{(2 \cdot 0+1)!}_{=1}} \text{ d'où } \mathcal{P}_0$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons alors que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

$n+1 \geq 1$ donc par 4. : $I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} I_n$

$$= \frac{2(n+1)}{2n+3} I_n$$

$$= \frac{2^2(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)} I_n$$

Par hypothèse de récurrence :

$$I_{n+1} = \frac{2^2(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)} \frac{(2^n \cdot n!)^2}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{(2^{n+1} \cdot (n+1)!)^2}{(\underbrace{2(n+1)+1}_{=2n+3})!}$$

D'où P_{n+1}, l'hérédité et le résultat par principe de récurrence.

Par 1. : $J_n = 2 I_n = 2 \cdot \frac{(2^n \cdot n!)^2}{(2n+1)!}$

6. ~~def I(n):~~
~~i = 1~~
~~for k in range(n):~~
~~i = 4**k * k / (2*k + 1)~~
~~i = i*2*(k+1) / (2*(k+1)+1)~~

```
def I(n):
    i = 1
    for k in range(1, n+1):
        i = i*2*k / (2*k + 1)      par 4.
    return i
```

7. Comme on admet la formule de Stirling, en considérant les suites extraites de termes impairs :

$$(2n+1)! \underset{\substack{n \to +\infty \\ \text{et produit}}}{\sim} \sqrt{2\pi(2n+1)} \left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}$$

Donc par quotient d'équivalents (les suites en présence ne s'annulent pas) :

Copie anonyme - n°anonymat : 527628

Code épreuve : 295 — Nombre de pages : 28 — Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies EM Lyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$I_m \underset{m\to+\infty}{\sim} \frac{\left(2^m \cdot \sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m\right)^2}{\sqrt{2\pi(2m+1)}\left(\frac{2m+1}{e}\right)^{2m+1}}$$

$$\underset{m\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\cdot\frac{m}{\sqrt{2m+1}} \frac{4^m\, m^{2m}}{\underbrace{(2m+1)^{2m+1}}_{\underset{m\to+\infty}{\sim}(2m)^{2m+1}}}$$

$$\underset{m\to+\infty}{\sim} \sqrt{\pi m}\cdot\frac{4^m\cdot m^{2m}}{2^{2m+1}\cdot m^{2m+1}}$$

$$\underset{m\to+\infty}{\sim} \sqrt{\pi m}\,\frac{1}{2m}$$

$$\underset{m\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{m}}\cdot\frac{1}{2}$$

D'où :

$$J_m \underset{m\to+\infty}{\sim} 2I_m \underset{m\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{m}}$$

Soient $P, Q, R \in \mathbb{R}[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

8. V Symétrie :

$\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt = \int_{-1}^{1} Q(t)P(t)\,dt$, par commutativité du produit de réels

L'application est symétrique

Bilinéarité :

$\int_{-1}^{1} (\lambda P + Q)(t) R(t) dt$

$= \int_{-1}^{1} \left(\lambda P(t) + Q(t)\right) R(t)\, dt = \lambda \int_{-1}^{1} P(t)R(t)\, dt + \int_{-1}^{1} Q(t)R(t)\,dt,$

par linéarité de l'intégrale

L'application est linéaire à gauche donc à droite par symétrie.

Positivité :

$$\int_{-1}^{1} P(t)\cdot P(t)\, dt = \int_{-1}^{1} (P(t))^2\, dt$$

Par positivité de l'intégrande (la quantité est élevée au carré) et positivité de l'intégrale :

$$\int_{-1}^{1} P(t)\cdot P(t)\, dt \geq 0$$

L'application est positive.

Définition :

P est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-1;1]$ en tant que polynôme. $t \mapsto P(t)^2$ l'est donc aussi par composition. Cette deuxième fonction est positive sur $[-1;1]$ qui est un segment non réduit à un point donc :

$$\forall t \in [-1;1],\ P(t)^2 = 0 \text{ donc } \forall t \in [-1;1],\ P(t) = 0$$

Ainsi les réels dans $[-1;1]$ sont tous racines de P. En particulier P a une infinité de racines donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$ et l'application est définie.

9. Non car :

$$\langle e_0, e_2 \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot t^2 \, dt$$

$$= 2 \int_0^1 t^2 \, dt \text{ , parité de l'intégrande}$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \underline{\frac{2}{3} > 0}$$

10. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$.

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$u(P)(x) = -2x \, P'(x) + (1-x^2) P''(x)$

Or le degré de P' est strictement inférieur à celui de P donc le degré de $x \mapsto -2x P'(x)$ est inférieur ou égal à celui de P par produit.

De plus $\deg P'' \leq \deg P - 2$ donc le degré de $x \mapsto (1-x^2)P''(x)$ est inférieur ou égal à cellli de P par produit.

Par somme le degré de $u(P)$ (qui est encore un polynôme par produit et somme) est inférieur à celui de P donc $\underline{u(P) \in \mathbb{R}_n[x]}$.

De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ u(\lambda P + Q)(x) = -2x \left(\lambda P'(x) + Q'(x) \right)$$

$$+ (1-x^2)\left(\lambda P''(x) + Q''(x) \right)$$

, par linéarité de la dérivation

$$= \lambda \left(-2x P'(x) + (1-x^2) P''(x) \right) + \left(-2x Q'(x) + (1-x^2) Q''(x) \right)$$

$$= \lambda u(P)(x) + u(Q)(x)$$

Ceci est vrai sur $\mathbb{R}$ d'où : $\underline{u(\lambda P + Q) = \lambda u(P) + u(Q)}$

et u est linéaire

u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_m[x]$.

11.a. ~~$u(e_0) = \int_{-1}^{1} 1\,dt = [t]_{-1}^{1}$~~ → abus de notation

$\forall x \in \mathbb{R},\ u(e_0)(x) = ((1-x^2)\cdot 0)'$, car e_0 est constant

$= 0$

Donc $u(e_0) = 0_{\mathbb{R}_m[x]}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ u(e_1)(x) = -2x\cdot e_0(x) + (1-x^2)\cdot 0$

$= -2e_1(x)$

Donc $u(e_1) = -2e_1$

b. ~~$u(e_k) = ((1-x^2)\cdot k\, e_{k-1})'$~~

~~$=$~~

$\forall x \in \mathbb{R},\ u(e_k)(x) = -2x\cdot k\, e_{k-1}(x) + (1-x^2)\, k\cdot(k-1)\, e_{k-2}(x)$

$= -2k\, e_k(x) + k(k-1)\, e_{k-2}(x)$

$- k(k-1)\, e_k(x)$

$= -k(k+1) + k(k-1)\, e_{k-2}(x)$

Donc $u(e_k) = -k(k+1)\, e_k + k(k-1)\, e_{k-2}$.

c. Montrons que $Sp(u) = \{-k(k+1) \mid k \in [\![0, m]\!]\}$.

La matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_m[x]$ est de la forme suivante par les résultats précédents :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_m}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -6 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & m(m-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & -m(m+1) \end{pmatrix}$$

La matrice est triangulaire supérieure, ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale et son spectre est donc :

$$Sp\left(Mat_{\mathcal{B}_n}(u)\right) = Sp(u) = \{-k(k+1) \mid k \in [\![0,n]\!]\}$$

u a donc $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[x]$ valeurs propres distinctes donc ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

12. u est diagonalisable donc il existe une base de $\mathbb{R}_n[x]$ de vecteurs propres de u. Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt permet donc d'obtenir une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[x]$ de vecteurs propres de u.

En prenant cette base, on la note $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n)$, et en notant $d_i \neq 0$ le coefficient dominant de ε_i pour $i \in [\![0,n]\!]$ (la famille est libre donc les (d_i) sont non nuls), on a que :

$$\mathbb{R}_n[x] = Vect(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n) = Vect\left(\frac{1}{d_0}\varepsilon_0, \dots, \frac{1}{d_n}\varepsilon_n\right)$$

Donc $\left(\frac{1}{d_0}\varepsilon_0, \dots, \frac{1}{d_n}\varepsilon_n\right)$ est génératrice de $\mathbb{R}_n[x]$ et a $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[x]$ vecteurs donc c'est une base orthogonale (bilinéarité du produit scalaire) de $\mathbb{R}_n[x]$ avec tous les coefficients dominants valant 1.

13. a. Par la caractérisation du projeté orthogonal par minimisation de la norme :

$\exists ! \, T_n \in \mathbb{R}_n[x], \ \min\limits_{g \in \mathbb{R}_n[x]} \| f - g \| = \| f - T_n \|$ où T_n est le projeté orthogonal de f sur $\mathbb{R}_n[x]$.

$T_n \in \mathbb{R}_n[x]$ et $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ donc il existe un (unique) $(c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} c_k L_k .$$

$\mathcal{L}_n$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[x]$ donc :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \ c_i = \langle f, L_i \rangle$$

b.

$$\| f - T_n \|^2 = \| f - \sum_{k=0}^{n} c_k L_k \|^2$$

$$\cancel{= \langle f - \sum_{k=0}^{n} c_k L_k , f - \sum_{k=0} }$$

$$= \|$$

$\|f\|^2 = \|f - T_n + T_n\|^2$

$= \|f - T_n\|^2 + \|T_n\|^2$, car $f - T_n$ est dans le noyau du projeté orthogonal sur $\mathbb{R}_n[x]$ et T_n dans son image. Ainsi par le théorème de Pythagore (les vecteurs sont orthogonaux)

$= \|f - T_n\|^2 + \left\langle \sum_{k=0}^{n} c_k L_k , \sum_{k=0}^{n} c_k L_k \right\rangle$

$= \|f - T_n\|^2 + \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \langle c_i L_i , c_j L_j \rangle$, par bilinéarité de $\langle \cdot , \cdot \rangle$

$= \|f - T_n\|^2 + \sum_{i=0}^{n} \langle c_i L_i , c_i L_i \rangle$, car $\mathcal{L}_n$ est orthonormée

$= \|f - T_n\|^2 + \sum_{i=0}^{n} c_i^2 \|L_i\|^2$

Donc :

$$\|f - T_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 \|L_k\|^2$$

14. a. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ P_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^{2j} (-1)^{k-j}$, par la formule du binôme de Newton

$= x^{2k} + Q(x)$ où $Q \in \mathbb{R}_{2k-1}[x]$

Ainsi en dérivant successivement :

$\forall x \in \mathbb{R},\ P_k^{(k)}(x) = 2k(2k-1)\dots(k+1)\, x^{2k-k} + Q^{(k)}(x)$

$= \frac{(2k)!}{k!} x^k + \underbrace{Q^{(k)}(x)}_{\in \mathbb{R}_{k-1}[x]}$

Q_k est donc de degré k et de coefficient dominant $\frac{(2k)!}{k!}$.

b. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$Q_0(x) = P_0(x) = (x^2-1)^0 = 1$

$Q_1(x) = P_1^{(1)}(x)$

$= P_1'(x)$

$= 2x$

$Q_2(x) = P_2''(x)$

$= 4(x^2-1) + 2x \cdot 4x$

$= 4x^2 + 8x - 4$

c. i. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ P_1(x) P_k'(x) = (x^2-1) \cdot 2k \underbrace{x}_{= e_1(x)} (x^2-1)^{k-1}$

$= 2k\, e_1(x) \cdot (x^2-1)^k$

$= 2k\, e_1(x) \cdot P_k(x)$

ii. Par la formule de Leibniz, les fonctions en présence étant infiniment dérivables car polynomiales :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} P_1^{(k+1-j)}(x)\ P_k^{(j+1)}(x)$

$= 2k \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} P_k^{(j)}(x)\ e_1^{(k+1-j)}(x)$

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 28 | Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies EM Lyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Comme e_1 est de degré 1 et P_1 de degré 2 :

$$\forall x\in\mathbb{R}, \binom{n+1}{n} P_1^{(n+1-n)}(x)\cdot P_n^{(n+1)}(x) + 1\cdot P_n^{(n+1-(n+1))}\cdot P_n^{(n+2)}(x)$$

$$+ P_1^{(n+1-(n-1))}(x)\cdot P_n^{(n)}(x)\cdot\binom{n+1}{n-1}$$

$$= 2n\left(P_n^{(n)}(x)\cdot 1 + \cancel{P_n^{(n+1)}(x)\cdot x}\right) = 2n\left(\binom{n+1}{n} P_n^{(n)}(x)\cdot 1 + P_n^{(n+1)}(x)\cdot x\right)$$

Donc : (car $P_n^{(n)} = Q_n$)

$$\cancel{\forall x\in\mathbb{R}, \quad 2x\, Q_n'(x) + (x^2-1)\,Q_n''(x) + 2\,Q_n(x)}$$

$$\cancel{= 2n\left(Q_n(x) + Q_n'(x)\cdot x\right)}$$

$$\forall x\in\mathbb{R}, 2x\quad Q_n'(x) + (x^2-1)\,Q_n''(x)$$

$$+ 2\cdot\frac{n(n+1)}{2}\, Q_n(x) = 2n(n+1)\,Q_n(x)$$

$$+ x\, Q_n'(x)$$

Donc :

$$\forall x\in\mathbb{R}, \quad (1-x^2)\,Q_n''(x) - x\,Q_n'(x) + n(n+1)\,Q_n(x) = 0$$

(En soustrayant le membre de gauche à gauche et à droite).

Cette relation donne :

$$u(Q_{kn}) + kn(kn+1)Q_{kn} = 0$$

par les calculs précédents

Donc comme $Q_{kn} \neq 0_{\mathbb{R}_m[x]}$ c'est une valeur propre de u pour la valeur propre $-kn(kn+1)$.

iii. $\mathcal{L}_m$

d. Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_m$:

$\forall f, g \in \mathbb{R}[x]$

« $\int_{-1}^{1} f^{(kn)}(t) g(t) dt = \sum_{j=0}^{kn-1} (-1)^j \left[f^{(kn-1-j)}(t) g^{(j)}(t) \right]_{-1}^{1} + (-1)^{kn} \int_{-1}^{1} f(t) g^{(kn)}(t) dt$ »

Initialisation :

$\mathcal{P}_0$ est vérifiée car la première somme est vide.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ et montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.

$\forall f, g \in \mathbb{R}[x]$, f et g sont infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ donc par intégration par parties :

$$\int_{-1}^{1} f^{(n+1)}(t) g(t) dt = \left[f^{(n)}(t) g(t) \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f^{(n)}(t) g'(t) dt$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à f et g' :

$$\int_{-1}^{1} f^{(n+1)}(t) g(t) dt = \left[f^{(n)}(t) g(t) \right]_{-1}^{1}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+1} \left[f^{(n-1-j)} g^{(j+1)}(t) \right]_{-1}^{1} + (-1)^{n+1} \int_{-1}^{1} f(t) g^{(n+1)}(t) dt$$

$$= \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l} \left[f^{(n-l)} g^{(l)}(t) \right]_{-1}^{1}$$

(changement d'indice $l = j+1$)

$$+ (-1)^{n+1} \int_{-1}^{1} f(t) g^{(n+1)}(t) dt + \left[f^{(n)}(t) g(t) \right]_{-1}^{1}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j} \left[f^{(n+1)-(l+1)}(t) g^{(l)}(t) \right]_{-1}^{1} + (-1)^{n+1} \int_{-1}^{1} f(t) g^{(n+1)}(t) dt$$

en reconnaissant le premier terme de la somme

D'où $\mathcal{P}_{n+1}$, l'hérédité et le résultat par principe de récurrence.

e. i. $\forall x \in \mathbb{R}$, $Q_n'(x) = \frac{(2n)!}{n!} x^n + Q(x)$ où $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$

En dérivant n fois :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P_n^{(2n)}(x) = Q_n^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{n!} \cdot n(n-1)\dots 1 + 0$

$= (2n)!$

ii. Montrons par récurrence que $\forall \ell \in [\![0, n]\!]$, $\mathcal{P}_\ell$:

<< $\exists R_{n,\ell} \in \mathbb{R}_\ell[x]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$ $P_n^{(\ell)}(x) = (x^2-1)^{n-\ell} R_{n,\ell}(x)$ >>

Initialisation : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$P_0(x) = (x^2-1)^{n-0} \cdot 1$ donc $R_{n,0} = e_0 \in \mathbb{R}_0[x]$ convient

d'où $\mathcal{P}_0$

Hérédité : Soit $\ell \in [\![0 ; n-1]\!]$. Supposons $\mathcal{P}_\ell$ et montrons $\mathcal{P}_{\ell+1}$.

Par l'hypothèse de récurrence : $\exists R_{n,\ell} \in \mathbb{R}_\ell[x]$,

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P_n^{(\ell+1)}(x) = \left(P_n^{(\ell)}\right)'(x)$

$= 2(n-\ell)x(x^2-1)^{n-\ell-1} R_{n,\ell}(x)$

$+ (x^2-1)^{n-\ell} R_{n,\ell}'(x)$

$= (x^2-1)^{n-(\ell+1)}\big(2(n-\ell)x R_{n,\ell}(x)$
$+ (x^2-1) R_{n,\ell}'(x)\big)$

Par ~~somme~~ produit les deux polynômes à droite de la factorisation sont dans $\mathbb{R}_{\ell+1}[x]$ car $R_{n,\ell} \in \mathbb{R}_\ell[x]$ donc par somme :

$F : x \mapsto 2(n-\ell)x R_{n,\ell}(x) + (x^2-1) R_{n,\ell}'(x) \in \mathbb{R}_{\ell+1}[x]$

Et le choix $R_{n,\ell+1} = F$ convient.

D'où $\mathcal{P}_{\ell+1}$, l'hérédité et le résultat par principe de récurrence.

iii. ~~$\forall x \in \mathbb{R}$, $P_n^{(n)}$~~

$$\forall \ell \in [\![0, n-1]\!], \forall x \in \mathbb{R}, P_n^{(\ell)}(x) = (x^2-1)^{\overbrace{n-\ell}^{>0}} R_{n,\ell}(x)$$

Donc :

$$\forall \ell \in [\![0; n-1]\!], \forall x \in \mathbb{R}, P_n^{(\ell)}(1) = P_n^{(\ell)}(-1)$$

$$= \underbrace{(1^2-1)^{n-\ell}}_{=0} \underbrace{R_{n,\ell}(1)}_{\text{ou } -1}$$

$$= 0$$

Problème 2 :

1. • f est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui ne s'y annule pas.

• $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\pi \underbrace{(1+x^2)}_{\geq 0}} \geq 0$ donc f est positive sur $\mathbb{R}$

• Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\int_{-A}^{A} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\arctan(x)\right]_{-A}^{A}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\arctan(A) - \arctan(-A)\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\arctan(A), \text{ par imparité de arctan}$$

$$\xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1$$

f peut être considérée comme une densité de probabilité.

2. $\frac{x}{\pi(1+x^2)} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\pi x}$ or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge par critère de Riemann ($1 \leq 1$) donc par critère d'équivalence sur les intégrales à intégrandes positives, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx$ diverge

donc X n'admet d'espérance (de moment d'ordre 1) donc pas de variance (moment d'ordre 2).

3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \left[\frac{\arctan(t)}{\pi}\right]_{-\infty}^{x}$

$$= \frac{\arctan(x)}{\pi} + \frac{1}{2}, \text{ car } \arctan(t) \xrightarrow[t \to -\infty]{} -\frac{\pi}{2}$$

$\forall y \in]0;1[, \ F(x) = y \iff y = \frac{\arctan(x)}{\pi} + \frac{1}{2}$

$\iff \tan\left(\pi\left(y - \frac{1}{2}\right)\right) = \tan(\arctan(x))$
$= x$

Ainsi F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;1[$ et :
$\forall y \in]0;1[, \ F^{-1}(y) = \tan\left(\pi\left(y - \frac{1}{2}\right)\right)$

4. a. $F^{-1}(U)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \ P(F^{-1}(U) \leq x) = P(F(F^{-1}(U)) \leq F(x))$, stricte croissance de F

$= P(U \leq \underbrace{F(x)}_{\in]0;1[})$

$= F(x)$

La fonction de répartition caractérise la loi donc :
$Y = F^{-1}(U)$ suit la même loi que X.

b.
```
def Cauchy():
    U=rd.rand()
    X= np.tan(np.pi*(U-1/2))
    return X
```

5. Z est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \ P(Z \leq x) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ P(Z \leq x) = P(|X| \leq x^2)$

$= P(X \leq x^2) - P(X \leq -x^2)$, X est à densité

Ainsi la fonction de répartition de Z est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ par composition donc Z est à densité et on a une densité par dérivation :

$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \ f_Z(x) = 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \; f_Z(x) = 2x\left(f(x^2) + f(-x^2)\right)$$
$$= 2x\left(\frac{1}{\pi(1+x^4)} + \frac{1}{\pi(1+x^4)}\right)$$
$$= 4\,\frac{x}{\pi(1+x^4)}$$

5. $4\dfrac{x^2}{\pi(1+x^4)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{4}{\pi x^2}$ et $4\dfrac{x^3}{\pi(1+x^4)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{4}{\pi x}$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverge et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge par critère de Riemann ($1 \leq 1$ et $2 > 1$). Donc par le critère d'équivalence sur les intégrales à intégrandes positives :

Z admet une espérance mais Z n'admet pas de moment d'ordre 2 donc pas de variance.

7. a. $\forall x \geq 0$,

$$\frac{x^2}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)} = \frac{x\left((x^2+\sqrt{2}x+1)-(x^2-\sqrt{2}x+1)\right)}{2\sqrt{2}\,(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{x}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\frac{x}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

Donc $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $\beta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ conviennent.

b. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$ et équivalentes en $+\infty$ à $\frac{1}{x^2}$ donc par critère de Riemann ($2 > 1$) et d'équivalence sur les intégrales à intégrandes positives elles convergent.

Faisons le changement de variable affine donc C^1 et strictement croissant $\cancel{v = 2(x - \frac{\sqrt{2}}{2})}$ $v = \sqrt{2}(x + \frac{\sqrt{2}}{2})$:

Copie anonyme - n°anonymat : 527628

Emplacement QR Code

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 28

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies EM Lyon

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}\,x + 1} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{2\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1}$$

$$= \sqrt{2} \int_1^{+\infty} \frac{dv}{v^2 + 1}$$

$$= \sqrt{2}\,\left(1 - F(1)\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(1 - \frac{\arctan(-1)}{\pi} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \sqrt{2}\,\left(\frac{1}{2} + \right.$$

$$= \sqrt{2}\,\pi\,\left(1 - F(1)\right)$$

$$= \sqrt{2}\,\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}$$

J'ai calculé la mauvaise intégrale l'autre calcul est analogue.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

C.

8. La fonction mystère donne la ~~fré~~ probabilité empirique de l'événement $\left[\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{n} - \sqrt{2}\right| \leq \varepsilon\right]$

où les (Z_i) sont indépendantes de même loi que Z.

L'affichage semble montrer que :

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{n} - \sqrt{2}\right| \leq \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

On peut donc en conjecturer par passage au complémentaire : ~~et inclusion d'événements~~ :

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{n} - \sqrt{2}\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

soit $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i \xrightarrow[n \to +\infty]{P} E(Z) = \sqrt{2}$.

On aimerait utiliser le théorème central limite mais on ne peut pas car Z n'admet pas de moment d'ordre 2.

9. $\mathbb{1}_A = \{0;1\}$ et $P(\mathbb{1}_A = 1) = P(A)$ donc

$\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathcal{B}(P(A))$ et $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$ et $V(\mathbb{1}_A) = P(A)(1-P(A))$

10. a. Soit $\omega \in \Omega$.

. Si $X(\omega) \leq s$, alors $\mathbb{1}_{[X > s]}(\omega) = 0$

et $\chi_{]s;+\infty[}(X(\omega)) = \chi_{]s;+\infty[}(s)$

$= 0$

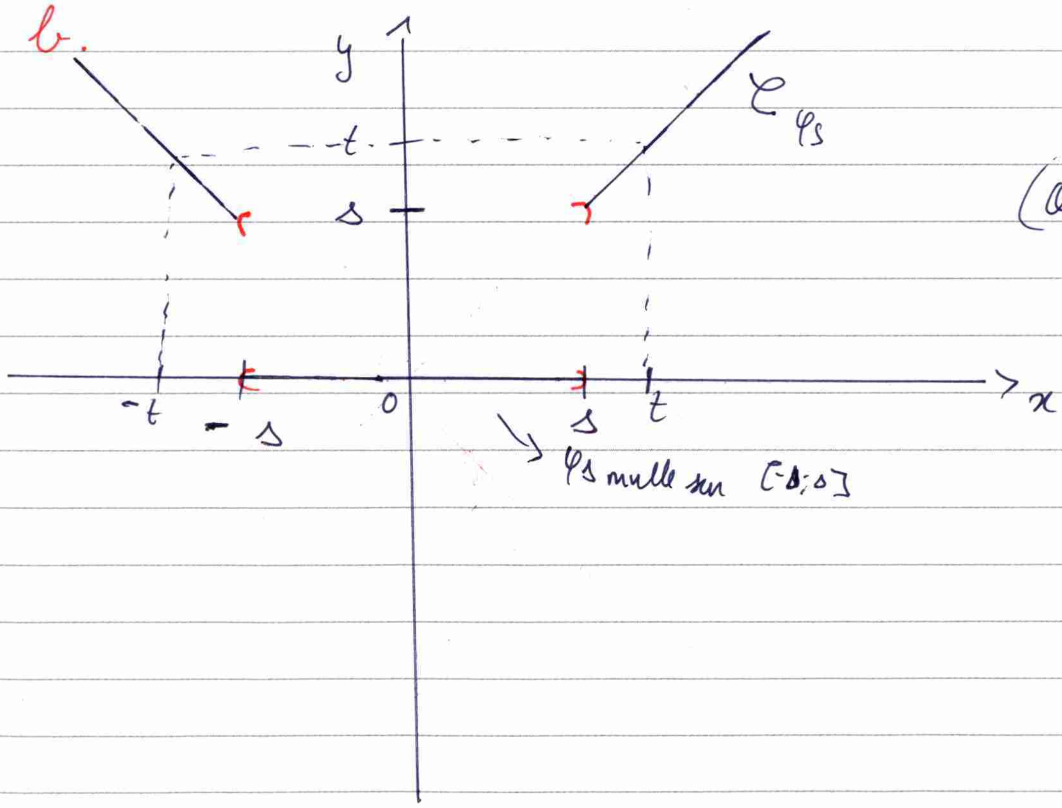
. Si $X(\omega) > s$ alors $\mathbb{1}_{[X>s]}(\omega) = 1$

et $\chi_{]s;+\infty[}(\underbrace{X(\omega)}_{> s}) = 1$

Dans tous les cas $\mathbb{1}_{[X>s]}(\omega) = \chi_{]s;+\infty[}(X(\omega))$

~~Donc on a~~

b.



(où $t > s$)

s et $-s$ sont les points de discontinuité.

11. Par disjonction des cas : $X_{k_n} = X_{k_n} \cdot \mathbb{1}_{[|X_{k_n}| \leq M]} + X_{k_n} \cdot \mathbb{1}_{[|X_{k_n}| > M]}$

$$= \underline{Y_{k_n} + Z_{k_n}}$$

12. On a la majoration :

$|Y_{k_n}| \leq M$ car Y_{k_n} vaut $\underset{<M}{0}$ si $|X_{k_n}| > M$ et X_{k_n} sinon

Donc :

$$0 \leq Y_{k_n}^2 \leq M^2$$

Par domination et croissance de l'espérance :

$$\underline{0 \leq E(Y_{k_n}^2) \leq E(M^2) = M^2}$$

13.a. $\varphi_M(X_{k_n}) = |X_{k_n}| \cdot \chi_{]M;+\infty[}(|X_{k_n}|)$

$= |X_{k_n}| \cdot \mathbb{1}_{[|X_{k_n}|>M]}$ par 10.a.

$= |Z_{k_n}|$

On pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\varphi_M(x) \xrightarrow[M\to+\infty]{} 0$

~~Lorsque M tend vers $+\infty$ il vient donc que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(\varphi_M(X_{k_n}) \leq x$~~

Donc presque surement $\varphi_M(X_{k_n})$ vaut 0 pour M au voisinage de $+\infty$ donc $\lim\limits_{M\to+\infty} E(|Z_{k_n}|) = 0$.

Copie anonyme - n°anonymat : 527628

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 28

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EM Lyon

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

En effet : ~~$P(|\varphi_M(X_n$~~

pour tout $\omega \in \Omega$,

pour M suffisament grand on a :

$$\varphi_M(X_n(\omega)) \in [-M;M] \text{ donc}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|\varphi_M(X_n) - 0| \geq \varepsilon) = 0$$

b. On a que :

$Z_n \leq |Z_n|$ et $-Z_n \leq |Z_n|$ donc :

$$0 \leq |E(Z_n)| \leq E(Z_n)$$

Donc par le théorème d'encadrement $|E(Z_n)| \underset{M \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

puis $E(Z_n) \underset{M \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

c. Par linéarité de l'espérance et 11. :

$E(X_{l_n}) = E(Z_{l_n}) + E(Y_{l_n})$ donc $E(Y_{l_n}) = \underbrace{-E(Z_{l_n})}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

Par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ et unicité de la limite :

$$E(Y_{l_n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 = E(X_{l_n})$$

14. Par contraposée :

si $|x| \leq \frac{t}{2}$ et $|y| \leq \frac{t}{2}$ alors l'inégalité triangulaire fournit :

$$|x+y| \leq |x| + |y| \leq t$$

D'où le résultat.

15. $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(|\overline{X_n}| > t) \overset{\text{par } 11.}{=} P(|\overline{Y_n} + \overline{Z_n}| > t)$$

$$\leq P\left(\left[|\overline{Y_n}| > \frac{t}{2}\right] \cup \left[|\overline{X_n}| > \frac{t}{2}\right]\right),$$ inclusion d'événements

$$\leq P\left(|\overline{Y_n}| > \frac{t}{2}\right) + P\left(|\overline{X_n}| > \frac{t}{2}\right),$$ formule du Crible

16\. a. $|\overline{Z_m}|$ est positive et admet une espérance car les (Z_i) en admettent une donc l'inégalité de Markov donne :

$$P\left(|\overline{Z_m}| > \frac{t}{2}\right) \leq \frac{2}{t} E(|\overline{Z_m}|)$$

$$\leq \frac{2}{t} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} E(|Z_i|) \text{, par l'inégalité triangulaire}$$

$$\leq \frac{2}{t} E(|Z_1|) \text{ par égalité en loi}$$

b. $E(|Z_1|) \xrightarrow[M \to +\infty]{} 0$ par 13. a. donc par la définition de la limite il existe $M_1 > 0$ tel que si $M \geq M_1$:

$$E(|Z_1|) \leq \frac{t}{2} \underbrace{\frac{\varepsilon}{3}}_{>0}$$

Donc pour $M \geq M_1$:

$$P\left(|\overline{Z_m}| > \frac{t}{2}\right) \leq \frac{2}{t} \cdot \frac{t}{2} \frac{\varepsilon}{3}$$

17\. a. $E(\overline{Y_m}^2) = \frac{1}{M^2} E\left(\sum_{k=1}^{m} Y_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} E(Y_i Y_j)\right)$, par un développement

~~$= \frac{1}{M^2} \left(\sum_{k=1}^{m} E(Y_k^2) + 2 E(Y_i\right.$~~

$$= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} E(Y_k^2) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} E(Y_i Y_j)\right)$$

par linéarité de l'espérance

b. $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$, $i>j$, Y_i et Y_j sont indépendantes par le lemme des coalitions et donc par égalité en loi :

$$2\sum_{1\leq i<j\leq n} E(Y_i Y_j) = 2E(Y_1^2)\cdot \mathrm{Card}(\{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2, i<j\})$$

$$= 2\cdot\frac{n(n-1)}{2}\, E(Y_1)^2$$