



V5-00152
724314
Mat Appro

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 24

Session : 2025

Épreuve de : Maths - Appro - 1

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie I

1) $l \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

soit $x \in E$

B_E est une base orthonormée de E ,

donc $\exists! (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p \mid x = \sum_{i=1}^p a_i e_i$

donc $l(x) = \sum_{i=1}^p a_i l(e_i)$ (car l est linéaire)

$= \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle l(e_i)$ (car B_E est orthonormée)
une base

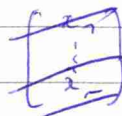
or, $l(x) \in \mathbb{R}$, donc $\exists \lambda_i \in \mathbb{R} \mid l(e_i) = \lambda_i e_i$
 $\exists \lambda \in \mathbb{R}$

donc $l(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle x, e_i \rangle e_i$

l est une forme linéaire dans E , donc en notant $B = \text{Mat}_{\mathbb{R}}^{B_E} l$

on obtient $X = \text{Mat}_{B_E} x$

on obtient $MX = f$



on obtient une ~~matrice ligne telle que~~

~~$$\pi X = a_1$$~~

π est une matrice ligne car l est une forme linéaire,

donc $\pi \in \pi_{1,p}(\mathcal{K})$

et $X \in \pi_{p,1}(\mathbb{R})$

donc $\pi X \in \pi_1(\mathbb{R})$
 $\stackrel{\cong \mathbb{R}}{=} \mathbb{R}$

et en notant $\pi = (a_1 \dots a_m)$

on obtient $\pi X = a_1 x_1 + \dots + a_m x_m$

en notant $a_0 = (a_1 \dots a_m) \in \mathbb{R}^E$ (car $l \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$)

on obtient $\pi X = \langle a_0, x \rangle$

donc, $\forall x \in \mathbb{R}, \exists \alpha_0 \in E \mid l(x) = \langle \alpha_0, x \rangle$
 $\exists \alpha_0 \in E$

Réciproquement, supposons que $\exists \alpha_0 \in E \mid \forall x \in \mathcal{K}, l(x) = \langle \alpha_0, x \rangle$

alors ~~$l(x) = a_{0,1} x_1 + \dots + a_{0,m} x_m$~~

2) Soit $\alpha_j \in E$

Soit $x \in E$

3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(y_1, y_2) \in F^2$

$$u^*(\lambda y_1 + y_2) = \beta_{\lambda y_1 + y_2}$$

$$\text{or, } \langle \beta_{\lambda y_1 + y_2}; x \rangle = \langle u(x); \lambda y_1 + y_2 \rangle \\ = \lambda \langle u(x); y_1 \rangle + \langle u(x); y_2 \rangle$$

$$\text{(avec 2)) } = \lambda \langle \beta_{y_1}; x \rangle + \langle \beta_{y_2}; x \rangle$$

donc par bilinéarité du produit scalaire,

$$\langle \beta_{\lambda y_1 + y_2} - (\lambda \beta_{y_1} + \beta_{y_2}); x \rangle = 0$$

ceci étant vrai \forall pour tout x dans E ,

$$\beta_{\lambda y_1 + y_2} - (\lambda \beta_{y_1} + \beta_{y_2}) \in E^\perp$$

$$\text{donc } \beta_{\lambda y_1 + y_2} = \lambda \beta_{y_1} + \beta_{y_2}$$

$$\text{donc } u^*(\lambda y_1 + y_2) = \lambda u^*(y_1) + u^*(y_2)$$

donc u^* est linéaire

4) en notant

soient $(x, y) \in E \times F$

en notant $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u^*)$ et $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E} x$

et $Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F} y$

$$\text{on a avec (1), } \langle AX; Y \rangle = \langle X; BY \rangle$$

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_{p, r}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{r, n}(\mathbb{R})$$

$$\text{donc } {}^t X ({}^t A - B) Y = 0$$

$$\forall (X, Y) \in \Pi_{p,r}(\mathbb{R}) \times \Pi_{r,n}(\mathbb{R})$$

$$\text{donc } {}^t A - B = 0 \quad \text{donc } \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u^*) = {}^t A$$

$$\text{rg}(u^*) = \text{rg}({}^t A) = \text{rg}(A) = \text{rg}(u)$$

$$\text{donc } \underline{\text{rg}(u^*) = \text{rg}(u)}$$

$$\text{et comme } \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u^*) = {}^t A,$$

$$\text{alors } B = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u^*)^* = {}^t({}^t A) = A$$

$$\text{donc } \underline{\text{rg}((u^*)^*) = \text{rg}(B) = \text{rg}(A)}$$

$$\text{donc } \forall i \in \{1, \dots, p\}, (u^*)^*(e_i) = u(e_i)$$

$(e_i)_{i \in \{1, \dots, p\}}$ est une base de E donc les endomorphismes
coïncident sur une base, donc sont égaux

$$\text{donc } \underline{(u^*)^* = u}$$

5) par le théorème du rang (comme F est à dimension finie),
(et comme E est à dimension finie)

$$n = \dim \text{Im}(u^*) + \dim \text{Ker}(u^*)$$

$$p = \dim \text{Im}(u) + \dim \text{Ker}(u)$$

$\text{Ker}(u)^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de $\text{Ker}(u)$ dans E , donc

$$p = \dim \text{Ker } u + \dim \text{Ker}(u)^\perp$$

$$\text{donc } \dim \text{Ker}(u)^\perp = \dim \text{rg}(u) = \text{rg}(u^*)$$

q. e. d.

Copie anonyme - n°anonymat : 724314

Emplacement QR Code	Code épreuve : 282	Nombre de pages : 24	Session : 2025
	Épreuve de : Maths - Appro - 7		
Consignes <ul style="list-style-type: none">• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)• Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

Soit $y \in \text{Im}(u^*)$

alors $\exists x_1 \in F \mid u^*(x_1) = y$

$$\begin{aligned} \forall x \in \text{Ker}(u), \langle y; x \rangle &= \langle u^*(x_1); x \rangle \\ &= \langle x_1; \underbrace{u(x)}_{=0} \rangle = 0 \end{aligned}$$

alors $y \in \text{Ker}(u)^\perp$ donc $\text{Im}(u^*) \subset \text{Ker}(u)^\perp$

par inclusion et égalité des dimensions,

$$\underline{\text{Im}(u^*) = \text{Ker}(u)^\perp}$$

6) Soit $x \in \text{Ker}(u^* \circ u)$
alors $x \in E$
alors et $u^*(u(x)) = 0$

Soit $x \in \text{Ker } u$

alors $x \in E$ et $u(x) = 0_F$

donc $u^*(u(x)) = 0_E$ (car u^* est linéaire (p. 3))

donc $\text{Ker } u \subset \text{Ker}(u^* \circ u)$

par le théorème du rang (avec $u^* \circ u : E \rightarrow E$ et $u : E \rightarrow F$),
(car E est de dimension finie)

$$\left(\begin{array}{l} p = \dim(\text{Im}(u^* \circ u)) + \dim \text{Ker}(u^* \circ u) \\ p = \dim \text{Im}(u) + \dim \text{Ker}(u) \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \cancel{(*)} \\ (*) \end{array}$$

avec Réciproquement Supposons que $x \in \text{Ker}(\cancel{u^* \circ u})$
 $\text{Ker}(u^* \circ u)$

$$\text{alors } x \in E \mid u^*(u(x)) = 0$$

$$\text{donc } u(x) \in \text{Ker}(u^*)$$

~~donc u~~

$$\text{soit } x_2 \in \text{Ker}(u^*)$$

$$\text{alors } u^*(x_2) = 0 \text{ donc}$$

$$\forall x \in E, \langle u(x); x_2 \rangle = \langle x; u^*(x_2) \rangle = 0$$

il reste à montrer que $u(x) = 0$

ainsi, par double inclusion, $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^* \circ u)$

donc avec (*), ~~on a~~ $\dim \text{Im}(u) = \dim \text{Im}(u^* \circ u)$

$$\text{Soit } y \in \text{Im}(u^* \circ u)$$

$$\text{alors } \exists x_1 \in E \mid u^*(u(x_1)) = y$$

$$\text{Soit } y \in \text{Im}(u)$$

$\text{Ker}(u)^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de $\text{Ker } u$ dans E

$$\text{donc } \cancel{p} = \dim \text{Ker}(u) + \dim \text{Ker}(u)^\perp$$

avec q. 5) on obtient $\dim \text{Im}(u^* \circ u) = \dim \text{Im}(u)$
 et (*) $= \dim \text{Ker}(u)^\perp$
 $= \dim \text{Ker} \text{Im}(u^*)$

~~donc~~ soit $y \in \text{Im}(u^*)$

alors $\exists x_1 \in E / u^*(x_1) = y$

en posant $x \in E$ tel que $u(x) = x_1$,

on obtient $u^*(u(x)) = y$

donc $y \in \text{Im}(u^* \circ u)$ donc $\text{Im}(u^*) \subset \text{Im}(u^* \circ u)$

donc par inclusion et égalité des dimensions,

$$\underline{\text{Im}(u^* \circ u) = \text{Im}(u^*)}$$

7) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $(y_1, y_2) \in \text{Im}(u^*)^2$

$$\begin{aligned} w(\lambda y_1 + y_2) &= u^*(u(\lambda y_1 + y_2)) \\ &= u^*(\lambda u(y_1) + u(y_2)) \quad (\text{par linéarité de } u) \\ &= \lambda u^*(u(y_1)) + u^*(u(y_2)) \\ &= \lambda w(y_1) + w(y_2) \end{aligned}$$

donc w est linéaire

donc w est un endomorphisme de $\text{Im}(u^*)$

soit $x \in \text{Ker}(w)$, alors $\forall t \in \mathbb{R}$

alors $x \in \text{Ker}(u^* \circ u)$ donc $x \in \text{Ker}(u)$ (q. 6)

donc ...

$$\text{donc } \text{Ker}(w) \subset \left\{ \begin{matrix} 0 \\ I_{n-(n^*)} \end{matrix} \right\}$$

la réciproque est évidente, donc $\text{Ker}(w) = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ I_{n-(n^*)} \end{matrix} \right\}$

donc w est injective et comme c'est un endomorphisme,

w est un isomorphisme

ainsi, sa matrice représentative est inversible

8) soit $\# = I_{n-(n^*)}^\perp$

π le projecteur orthogonal de F sur $I_{n-(n^*)}$

a) alors $I_{\text{Im}(\pi)} = \text{Ker}(\pi - \text{id}) = I_{n-(n^*)}$

et $\text{Ker}(\pi) = I_{n-(n^*)}^\perp$

donc Soit $x \in F$,

~~$n^* \cdot (\#(x))$~~ si $\pi(x) \in I_{n-(n^*)}$
alors $\pi(x) \in \text{Ker}(w)^\perp$

b) $\text{Tr}(\varphi) = \text{Tr}(\pi)$

π est un projecteur donc est diagonalisable et semblable

à une matrice diagonale telle que $A = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{k \text{ fois}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{p-k \text{ fois}})$

avec $k = \dim I_{n-(n^*)}$
 $= \text{rg}(w)$

comme $\text{Tr}(\varphi) = \text{Tr}(A)$ alors $|\text{Tr}(\varphi)| = k = \text{rg}(w)$

donc $|\text{Tr}(\varphi)| = \text{rg}(w)$

Copie anonyme - n°anonymat : 724314

Emplacement QR Code	Code épreuve : 282	Nombre de pages : 24	Session : 2025
	Épreuve de : Maths - Appro - 7		
Consignes <ul style="list-style-type: none">• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)• Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

$$g) \quad M = {}^tAA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

Supposons que $\text{rg}(A) = p$

par le théorème du rang avec $A \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$,

$$\left. \begin{array}{l} p = \dim \text{Im} A + \dim \text{Ker} A \\ p = \text{rg}({}^tAA) + \dim \text{Ker } {}^tAA \end{array} \right\} (*)$$

Soit $X \in \text{Ker} A$,

$$\text{alors } AX = 0_{\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})}$$

$$\text{donc } {}^tAAX = 0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}$$

$$\text{donc } \text{Ker} A \subset \text{Ker } {}^tAA$$

Si $X \in \text{Ker } {}^tAA$,

$$\text{alors } {}^tAAX = 0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})} \text{ donc } \|AX\|^2 = {}^tX {}^tAAX = 0$$

$$\text{donc } \|AX\| = 0 \text{ donc } AX = 0_{\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})}$$

$$\text{donc } X \in \text{Ker} A$$

donc par double inclusion, $\text{Ker } {}^tAA = \text{Ker} A$

donc avec (*), comme $\text{rg}(A) = p$,

$\text{rg}(A) = \text{rg}({}^tAA) = p$ et comme ${}^tAA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$,

$\Leftrightarrow \Pi$ est inversible

Réciproquement supposons que Π soit inversible

alors $\text{rg}({}^tAA) = \text{rg}(A) = p$

et comme on l'a montré, $\text{rg}({}^tAA) = \text{rg}(A) = p$

donc $\text{rg}(A) = p$

donc Π est inversible $\Leftrightarrow \text{rg}(A) = p$

70) a) Supposons que $\text{rg}(A) = p$ alors Π est inversible

$$\Pi = {}^tAA$$

b)

def Calcule $p(A)$

if al. matrix ~~rank(A) !=~~

$$p = \text{mp_shape}(A)[1]$$

if al. matrix ~~rank(A) !=~~ p :

test de $\text{rg}(A)$

return Error

else:

$$\Pi = \text{mp_transpose}(A) * A$$

$$M1 = \text{al_inv}(\Pi)$$

calcul de Π et Π^{-1}

~~return Π et Π^{-1}~~

calcul de $p(A)$

$$X = \text{mp_dot}(A, M1)$$

$$\text{return mp_dot}(X, \text{mp_transpose}(A))$$

11) Soit $X \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$

$$\epsilon^T X^T X = \epsilon^T A A X = \langle AX, AX \rangle = \|AX\|^2 \geq 0$$

donc $\forall X \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \quad \epsilon^T X^T X \geq 0$

Partie II :

12) Soit $X \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $H \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$

soit $\varphi : t \mapsto J_0(X+tH)$, continue sur I tel que $(0,1) \subset I$.

pour $H = 0_{\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})}$, le résultat est évident

avec $H \neq 0_{\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})}$ φ est la fonction directionnelle qui permet

d'étudier J_0 en X dans la direction H (avec $X \in \mathbb{R}^p$
et $H \in \mathbb{R}^p$)

$$a) \quad J_0(X) = \frac{1}{2} \|AX - Y\|^2$$

$$= \frac{1}{2} (\|AX\|^2 - 2\langle AX, Y \rangle + \|Y\|^2)$$

$$= \frac{1}{2} (\|AX\|^2 - 2\epsilon^T X^T A Y + \|Y\|^2)$$

~~on trouve les der.~~

si J_0 est \mathcal{C}^2 on a $\varphi \in \mathcal{C}^2$ sur I tel que

$$\forall t \in I, \quad \varphi'(t) = \langle D(J_0)(X+tH); H \rangle$$

$$\text{et } \forall t \in I, \quad \varphi''(t) = \frac{1}{2} \varphi''_{X+tH}(H)$$

forme quadratique associée à $X+tH$

on utilise Taylor Lagrange, puis on trouve le résultat comme --
reste intégral

13)

Supposons que $D(X) = 0$

$$\text{alors } \forall (X, H) \in \mathbb{R}^p, J_0(X+H) - J_0(X) = \frac{\gamma}{2} {}^t H A H$$

en notant $Y_1 = X+H$,

$$\forall Y_1 \in \mathbb{R}^p, J_0(Y_1) = \frac{\gamma}{2} {}^t H A H + J_0(X)$$

comme $J_0(H) = \frac{\gamma}{2} \|A H\|^2 \geq 0$ d'après 11), ${}^t H A H \geq 0$

$$\text{donc } \forall Y_1 \in \mathbb{R}^p, J_0(Y_1) \geq J_0(X)$$

donc J_0 admet un minimum global en X

Réciproquement --

14) Soit $X_0 \in \text{Ker } A^\perp$ tel que $\{X_0\} \in S_0 \cap \text{Ker } A^\perp$

soit $X \in \text{Ker } (A)^\perp$

Soit $X \in \text{Ker } A^\perp \cap S_0$

$$\text{alors } \forall X_1 \in \text{Ker } A \quad \langle X; X_1 \rangle = 0 \text{ et } D(X) = 0$$

15) a) Soit $X \in S_0$,

$$\text{alors } D(X) = 0 \quad \text{donc} \quad M X = {}^t A Y$$

$$\text{donc} \quad {}^t A A X = {}^t A Y$$

$$\text{donc} \quad {}^t A (A X - Y) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{b) } A(X - X_0) &= A X - A X_0 \\ &= Y - A X_0 \end{aligned}$$

$$\text{et comme } X_0 \in S_0 \cap \text{Ker } A^\perp, \quad M X_0 = {}^t A Y$$

$$\text{donc} \quad {}^t A (A X_0 - Y) = 0$$

Copie anonyme - n°anonymat : 724314

Emplacement QR Code	Code épreuve : 282	Nombre de pages : 24	Session : 2025
	Épreuve de : Maths - Appro - 7		
Consignes <ul style="list-style-type: none">• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)• Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

Supposons que $X \neq X_0$,

comme $X - X_0 \in \text{Ker } A$,

$$AX = AX_0$$

c)

$$(b) \quad y(A) = p, \quad Y = AU_0 + Z$$

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, z_i \in \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

$$a) \quad T = \|A(X - U_0)\|^2$$

$$= \|AX - AU_0\|^2$$

$$= \|A\pi^{-1} \epsilon AY - AU_0\|^2 = \|\varphi Y - AU_0\|^2$$

}

$$\|\varphi Z\|^2 = \langle \varphi Z, \varphi Z \rangle = {}^t Z \epsilon \varphi \varphi Z \\ = {}^t Z \|\varphi\|^2 Z$$

$$\text{Et, } \|\varphi\|^2 = \|A(\pi^{-1}) \epsilon A\|^2 = {}^t A \pi^{-1} \epsilon A A \pi^{-1} \epsilon A \\ \vdots \\ = \varphi \dots$$

b)

def simulate T(A, sigma)

~~z = rd.normal(0, sigma, [1,~~

n = mp.shape(A) [0]

z = rd.normal(0, sigma, [n, n])

phi = Calcule_phi(A)

q. 105

~~return~~ mp

X = mp.dot(mp.transpose(z), phi)

return mp.dot(X, z)

T = z^T phi z

c) :

def esperance(A, sigma)

n = 10000

à modifier selon la précision souhaitée

X = mp.zeros(n)

for k in range(n):

X[k] = simulate T(A, sigma)

return mp.mean(X)

on calcule la moyenne empirique de T

d) on remarque qu'en prenant des matrices pour lesquelles

on prend des variables aléatoires rectangulaires (variance $\frac{1}{n}$ à 1),
égale

on obtient une espérance qui augmente en même temps que

la taille de la matrice A augmente.

on peut conjecturer que l'espérance n'existe pas, car elle

ne semble pas converger

le second programme trace le graphique de l'espérance, qui semble diverger à mesure que k augmente

on peut donc conjecturer que T n'admet pas d'espérance, car ici on ne change pas la matrice.

e) $Z_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

do par la formule de Huygens,

$$E(Z_n^2) = V(Z_n) + E(Z_n)^2 = \sigma^2$$

donc $E(Z_n^2) = \sigma^2$

par la formule de transfert,

$E(Z_n^3)$ existe $\Leftrightarrow I = \int_{-\infty}^{+\infty} t^3 f_{Z_n}(t) dt$ converge absolument

$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^3 e^{-\frac{t^2}{2(\frac{t}{\sigma})^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} dt$ (avec f_{Z_n} la densité de Z_n)

~~$= 2 \int_0^{+\infty} \frac{t^3 e^{-\frac{t^2}{2(\frac{t}{\sigma})^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} dt$ (car l'intégrande est impaire)~~

comme l'intégrande est impaire, si $\int_0^{+\infty} \frac{t^3 e^{-\frac{t^2}{2(\frac{t}{\sigma})^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} dt$ converge,

alors $I = 0$

$\forall t > 0, \frac{t^3 e^{-\frac{t^2}{2(\frac{t}{\sigma})^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \geq 0$

$\frac{t^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \times \frac{t^3}{e^{\frac{t^2}{2\sigma^2}}} = \frac{t^5}{\sqrt{2\pi}\sigma e^{\frac{t^2}{2\sigma^2}}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ (par croissance comparées)

donc $\Rightarrow t^3 f_2(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (intégrale de Riemann avec $2 > 1$)

par critère de négligeabilité, $\int_0^{+\infty} t^3 f_2(t) dt$ converge
 > 0 donc converge absolument

donc $\mathcal{L}\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

d'après le théorème de transfert,

$\mathcal{L}\left(\frac{3}{2}\right)$ existe $\Leftrightarrow I = \int_{-\infty}^{+\infty} t^4 f_2(t) dt$ converge absolument

comme $t \mapsto t^4 f_2(t)$ est une p.é.

$I = 2 \int_0^{+\infty} t^4 \times \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2} t^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} dt$

on pose le changement de variable affine $t = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} u \Leftrightarrow u = \sqrt{2}\sigma t$

quand $t \rightarrow +\infty$, $u \rightarrow +\infty$ (car $\sigma > 0$)

quand $t = 0$, $u = 0$

$dt = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} du$

donc I les intégrales sont de même nature et égales e cas de convergence,

$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \times 2 \times \int_0^{+\infty} \cancel{2^3 \sigma^4} u^4 e^{-u^2} \times \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} du$
 $= \frac{2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \sigma^2 \int_0^{+\infty} u^4 e^{-u^2} du$

on réalise de nouveau le changement de variable $t = \sqrt{u} \Leftrightarrow u = t^2$
 $u \mapsto \sqrt{u}$ est strictement croissante donc admet une bijection

quand $du \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow +\infty$
 quand $u = 0$, $t = 0$

$dt = \frac{1}{2} du = 2t dt$

donc $2I = \frac{2^{\frac{3}{2}} \sigma^2}{\sqrt{\pi}} \times \int_0^{+\infty} t^8 e^{-t^2}$

Copie anonyme - n°anonymat : 724314

Emplacement QR Code	Code épreuve : 282	Nombre de pages : 21	Session : 2025
	Épreuve de : Math - Appl - 1		
Consignes <ul style="list-style-type: none">• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)• Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

donc quand $u \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow +\infty$
quand $u \rightarrow 0$, $t = 0$

$$du = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2I &= \frac{2^3 \sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-u} \times \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \\ &= \frac{4\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-u} dt \end{aligned}$$

donc $E(y_1^2)$ existe et vaut $\frac{4\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$

$$f) T_2 = \sum_{\substack{i,j \in \{1, \dots, m\} \\ i \neq j}} p_{ij} y_i y_j = \sum_{\substack{i,j \in \{1, \dots, m\} \\ i \neq j}} p_{ji} y_i y_j$$

donc $2T_2 = \sum_{\substack{i,j \in \{1, \dots, m\} \\ i \neq j}} p_{ij} y_i y_j$

donc $T_1 + 2T_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m p_{ij} y_i y_j = \mathbf{y}^T \mathbf{Q} \mathbf{y}$. (formule de la forme quadratique)

donc $T = T_1 + 2T_2$

par linéarité de l'espérance, $E(T) = E(T_1) + 2E(T_2)$

et $E(T_1) = \sum_{i=1}^m p_{ii} E(y_i^2)$ et $E(T_2) = \sum_{\substack{i,j \in \{1, \dots, m\} \\ i \neq j}} p_{ij} E(y_i y_j)$

donc
$$\underline{E(T_1) = \sigma^2 \sum_{i=1}^m \rho_{i,i} = \sigma T_n(\rho) = \sigma \eta_1(m)}$$

les y_i sont indépendantes, donc $E(T_1) = \sum_{1 \leq i < j \leq m} \rho_{i,j} E(y_i) E(y_j)$

g)

par linéarité de l'espérance,

$$E(T_1 T_2) = E\left(\sum_{i=1}^m \rho_{i,i} y_i^2 \left/ \sum_{i=1}^m \sum_{j=i+1}^m \rho_{i,j} y_i y_j\right.\right)$$

$$= T_n$$

$$d) T_n^2 = \left(\sum_{i=1}^m \rho_{i,i} y_i^2\right) \left(\sum_{j=1}^m \rho_{j,j} y_j^2\right)$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \rho_{i,i} \rho_{j,j} y_i^2 y_j^2$$

par la même dé-

$$\text{compositio} = \sum_{i=1}^m \rho_{i,i}^2 y_i^4 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} \rho_{i,i} \rho_{j,j} y_i^2 y_j^2$$

pour T_1 et T_2 ,

(2.9)

par linéarité de l'espérance,

$$E(T_n^2) = \sum_{i=1}^m \rho_{i,i}^2 E(y_i^4) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} \rho_{i,i} \rho_{j,j} E(y_i^2 y_j^2)$$

d'autre part, ~~$$T_n^2 = \left(\sum_{1 \leq i < j \leq m} \rho_{i,j} y_i y_j\right) \left(\sum_{1 \leq k < l \leq m} \rho_{k,l} y_k y_l\right)$$~~

~~en partant admettant que l'a a trouvé~~

~~$$E(T) =$$~~

on réutilise la linéarité de l'espérance par T_2 --

i) par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned} E(T^2) &= E\left(\left(\frac{T_1}{2} + 2T_2\right)^2\right) \\ &= E\left(\frac{T_1^2}{4}\right) + 4E(T_2^2) + 4\underbrace{E\left(\frac{T_1 T_2}{2}\right)}_{= 0 \text{ d'après g)} \\ &= \frac{\sigma^4}{4}(q+p^2) + \frac{\sigma^4}{2}(p-q) \\ &= \frac{\sigma^4}{2}(4q + 2p^2 + p - q) \\ &= \frac{\sigma^4}{2}(3q + 2p^2 + p) \end{aligned}$$

en admettant qu'on a trouvé c) f)

$$E(T) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2}} \sqrt{3q + 2p^2 + p},$$

par la formule de Huygens,

$$\begin{aligned} V(T) &= \frac{\sigma^4}{2}(3q + 2p^2 + p) - \frac{\sigma^4}{2}(3q + 2p^2 + p) \\ &= \frac{\sigma^4}{2}(4p) = 2p\sigma^4 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \underline{V(T) = 2p\sigma^4}$$

Soit $\alpha > 0$

$$P(T > (1+\alpha)p\sigma^2) = P\left(\frac{T}{p\sigma^2} - 1 > \alpha\right)$$

$$\text{et comme } \left[\left|\frac{T}{p\sigma^2} - 1\right| > \alpha\right] \supset \left[\frac{T}{p\sigma^2} - 1 > \alpha\right]$$

$$\text{et } \left[\left|\frac{T}{p\sigma^2} - 1\right| \geq \alpha\right] \supset \left[\frac{T}{p\sigma^2} - 1 > \alpha\right]$$

$$\text{on a } P(T > (1+\alpha)p\sigma^2) \leq P\left(\left|\frac{T}{p\sigma^2} - 1\right| \geq \alpha\right)$$

comme $\frac{T}{p\sigma^2}$ admet une espérance (admettons qu'elle soit égale à 1...)

$$\text{et une variance telle que } V\left(\frac{T}{p\sigma^2}\right) = \frac{1}{p^2\sigma^4} V(T) \\ = \frac{2}{p}$$

alors d'après l'inégalité de Bienaymé Tchebychev,

$$\forall \alpha > 0, P\left(\left|\frac{T}{p\sigma^2} - 1\right| \geq \alpha\right) \leq \frac{2}{p\alpha^2}$$

$$\text{donc } \forall \alpha > 0, P(T > (1+\alpha)p\sigma^2) \leq \frac{2}{p\alpha^2}$$

Partie III

17) soit f : soient $(u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2$ / $u \neq 0_{\mathbb{R}^n}$
si $v = 0_{\mathbb{R}^n}$, le résultat est évident, prenons $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$

soit $g: t \mapsto \|u + tv\|$

soit $g^2: x \mapsto \|x\|^2$ ($x \in \mathbb{R}^n$, avec $x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$)

γ est la fonction directionnelle qui permet d'étudier f en u dans la direction v

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$\setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$

comme $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i^2$ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^n (fonction polynomiale)

$$\begin{aligned} & \cdot t \mapsto \sqrt{t} \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\ & \cdot \forall x \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0 \end{aligned}$$

$\setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$

donc par composition, f est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^n

donc g est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} ,

$$\text{et } \forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = \langle \nabla(f)(u + tv); v \rangle$$

$$\text{on } \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}, \nabla(f)(x) = 2(x_1, \dots, x_n) = 2x$$

Copie anonyme - n°anonymat : 724314

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 24

Session : 2025

Emplacement
GR Code

Épreuve de : Maths - Apéro - 1

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

~~donc $\langle \nabla(f)(m+tw); v \rangle = 2 \langle$~~
 \uparrow
~~par bilinéarité~~
~~des produit scalaire~~

~~donc $g'(0) = \langle \nabla(f)(m); v \rangle =$~~

~~donc par bilinéarité des produit scalaire,~~

~~$g'(t) = \langle 2m + 2tw; v \rangle = 2 \langle m; v \rangle + t \|v\|^2$~~

~~trouve $\frac{\langle m; v \rangle}{\|m\|}$ puis on utilise~~

$\forall x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, $\partial_i(f)(x) = \frac{2x_i}{2\sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2}} = \frac{x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2}}$

donc $\nabla(f)(m) = \frac{m}{\|m\|}$

donc $g'(0) = \langle \nabla(f)(m); v \rangle$

$= \frac{\langle m; v \rangle}{\|m\|}$

donc $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0)$

$$\text{donc } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|m+tv\| - \|m\|}{t} = \frac{\langle m, v \rangle}{\|m\|}$$

18)

(23) d)

i)

def FuncSom (alpha, Y, lda):

k = np.shape(alpha)[0]

F = -1

for i in range (1, k): # avec sa définition;

F = F + (alpha[i] * Y[i]) ** 2 / (lda + alpha[i] ** 2) ** 2

return F

ii)

def CalcBeta (alpha, Y, epsilon):

a = 0

cf page 25 => ~~b = 1/3 * np.sum(Y ** 2)~~ ou ~~b = 1/3 * np.sum(Y ** 2)~~ # il faut enlever les termes de l'ordre 0

c = (b - a) / 2

while np.abs (FuncSom (alpha, Y, c)) > epsilon:

if FuncSom (alpha, Y, c) > 0: # avec (23) a, a

a = c

F décroissante sur

elif FuncSom (alpha, Y, c) < 0: # ↗ 30, + a c

b = c

else:

return c

si a tombe exactement sur 0

c = (b - a) / 2

donc sur p si p(Y) > 0

return c

iii)

def CalcSolution(alpha, Y, epsilon):

B = mp.zeros

k = alpha.mp.shape(alpha)[0]

m = mp.shape(Y)[0]

B = mp.zeros([m, m])

for i in range(k):

B[i, i] = alpha[i]

on crée B

V = mp.zeros([m, 1])

on crée V

for ~~i~~ i in range(k):

~~V[i, 0] =~~

~~#~~

ro = 0

for im in range(k):

ro = ro + (Y[i] * alpha[i]) ** 2

if ro <= 1:

beta = 0

on détermine β

else:

beta = CalcBeta(alpha, Y, epsilon)

for i in range(k):

V[i, 0] = alpha[i] * Y[i] / (beta + alpha[i] ** 2)

return Y - mp.dot(B, V)

23) a) soit $\lambda > 0$

$$F(\lambda) = -\gamma + \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i^2 y_i^2}{(\lambda + \alpha_i^2)^2} = -\gamma + \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i^2 y_i^2}{\lambda^2 + 2\lambda\alpha_i^2 + \alpha_i^4}$$

$$= -\gamma + \sum_{i=1}^k$$

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$, il faut montrer que $\frac{y^2}{x^2 + 2xy + y^2} \leq \frac{1}{4x}$

$$\Leftrightarrow 4xy \leq x^2 + 2xy + y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0 \text{ ce qui est vrai}$$

donc $\forall \lambda > 0, \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n,$

$$\frac{\alpha_i^2}{\lambda^2 + 2\lambda\alpha_i^2 + \alpha_i^4} \leq \frac{1}{4\lambda}$$

$$\text{donc } \underline{F(\lambda) \leq -1 + \frac{1}{4\lambda} \sum_{i=1}^k \alpha_i^2}$$

Conjecture 23) d) ii)

~~soit~~ $b^T = 0$

for i in range (k) :

$$b^T = b^T \chi(i) \neq 2$$

$$b = (1/4) b^T$$

\neq on a ainsi la somme des α_i jusqu'à k et non jusqu'à n avec le mp. sum...

19) b) ~~AD~~

$$\forall X \in \mathcal{K}_B, \langle D(X_0); X \rangle \leq \|BX\| \quad (\text{avec 19a})$$

$= 0 \text{ car } X \in \mathcal{K}_B$

20) a) Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad (u \neq 0)$

$$\|u+v\|^2 - \left(\|u\| + \frac{\langle u; v \rangle}{\|u\|} \right)^2$$

$$= \|u+v\|^2 - \|u\|^2 - 2\|u\| \langle u; v \rangle - \frac{\langle u; v \rangle^2}{\|u\|^2}$$

$$= \cancel{\|u\|^2} + \cancel{\|v\|^2} + 2\langle u; v \rangle + \cancel{\|u\|^2} - \cancel{\|u\|^2} - 2\langle u; v \rangle - \frac{\langle u; v \rangle^2}{\|u\|^2}$$

$$= \frac{(\|u\|\|v\|)^2 - \langle u; v \rangle^2}{\|u\|^2}$$

donc $\forall (u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2 \quad (u \neq 0,$

$$\|u+v\|^2 - \left(\|u\| + \frac{\langle u; v \rangle}{\|u\|} \right)^2 = \frac{\|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u; v \rangle^2}{\|u\|^2}$$

$$20) b) \|u+v\|^2 - \left(\|u\| + \frac{\langle u; v \rangle}{\|u\|} \right)^2 = \left(\|u+v\| - \|u\| - \frac{\langle u; v \rangle}{\|u\|} \right) \left(\|u+v\| + \|u\| + \frac{\langle u; v \rangle}{\|u\|} \right)$$

19) d) avec comme $w \in \mathcal{N}_{m, r}(\mathbb{R})$, a priori v tel que $Bv = w$,

ou a avec 19) c) $D(X_0) = \mathcal{E}BBv$