Copie anonyme - n°anonymat : 645638

V9-00108
645638
Mat2 Appro

Code épreuve : 283 | **Nombre de pages :** 18 | **Session :** 2025

Épreuve de : Mathématiques 2 Approfondies ESCP-BS - HEC PARIS.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie I/

1- a) $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ donc X_i admet un moment d'ordre 2

$E(X_i^2) = V(X_i) + E(X_i)^2 = 1$ (formule de Koenig-Huygens)

donc S_n admet une espérance et par linéarité $E(S_n) = n$

b)
```
def Simul (n) :
    X = rd.normal (n)
    return np.sum (X**2)
```

c)

2) a- $W_1 = \frac{1}{2} X_1^2$

Soit $x < 0$ $P(W_1 \leq x) = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$

$P(W_1 \leq x) = P(X_1^2 \leq 2x) = P(|X_1| \leq \sqrt{2x})$

$= \Phi(\sqrt{2x}) - \Phi(-\sqrt{2x})$ car X_1 est à densité.

$= 2\,\Phi(\sqrt{2x}) - 1$

donc $\forall x \in \mathbb{R},\ F_{W_1}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2\,\Phi(\sqrt{2x}) - 1 & x \geq 0 \end{cases}$

F_{W_1} est continue sur $\mathbb{R}_-^*$, sur $\mathbb{R}_+$ par composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$

et $\lim\limits_{x \to 0^+} 2\,\Phi(\sqrt{2x}) - 1 = 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 1$

donc F_{W_1} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en 0 (car $x \mapsto 2\,\Phi(\sqrt{2x}) - 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ au moins)

donc W_1 est à densité

par dérivation et prolongement arbitraire en 0 :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{W_1}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{\cancel{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$

b) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x}\, dx$

$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx$

$= \sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} f_{W_1}(x)\, dx$ car $\int_0^{+\infty} f_{W_1}(x)\, dx = 1$

$= \sqrt{\pi}$

d'où $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2}{2}$

on sait que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\frac{X_i^2}{2} \hookrightarrow \gamma(\frac{1}{2})$

et les $\frac{X_i^2}{2}$ sont indépendants donc par stabilité de la loi gamma
(lemme des coalitions)

$W_n \hookrightarrow \gamma(\frac{n}{2})$

d) $E(W_n) = \frac{n}{2}$ d'où $E(S_n) = n$ (linéarité de l'espérance)

$V(W_n) = \frac{n}{2} \iff \frac{1}{4} V(S_n) = \frac{n}{2} \iff V(S_n) = 2n$

3 - a) $\frac{1}{W_n}$ admet une espérance

$\iff \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} f_{W_n}(t)\, dt$ converge absolument.

or $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} f_{W_n}(t)\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \frac{t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\, dt$

$= \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{n}{2}-2} e^{-t}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\, dt$

or $t \mapsto t^{\frac{n}{2}-2} e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et positive sur $\mathbb{R}_+^*$

et $t^{\frac{n}{2}-2} e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge d'après

le critère de Riemann.

donc $\int_1^{+\infty} \frac{t^{\frac{n}{2}-2} e^{-t}}{\Gamma(\frac{n}{2})} dt$ converge absolument

et $t^{\frac{n}{2}-2} e^{-t}$ est continue sur $[0,1]$ si $n \geq 4$

si n=3 : $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ converge absolument (2b)

dans tous les cas $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} f_{W_n}(t)\, dt$ converge absolument

et $\frac{1}{W_n}$ admet une espérance

$$E\left(\frac{1}{W_n}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{n}{2}-2} e^{-t}}{\Gamma(\frac{n}{2})} dt$$
$$= \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{+\infty} \frac{t^{(\frac{n}{2}-1)-1} e^{-t}}{\Gamma(\frac{n}{2}-1)} dt.$$
$$= \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

d'où $E\left(\frac{1}{W_n}\right) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{n}{2})}$

$$E\left(\frac{1}{W_n}\right) = 2E\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

or $\frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{2\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{2\Gamma(\frac{n}{2}-1+1)} = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{2(\frac{n}{2}-1)\Gamma(\frac{n}{2}-1)} = \frac{1}{n-2}$

d'où $E\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{n-2}$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 645638

Code épreuve : 283	Nombre de pages : 18	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques 2 Approfondies ESCP BS - HEC PARIS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

b) La variable $\frac{1}{\sqrt{S_n}}$ admet un moment d'ordre 2 (3-a) donc elle admet des moments d'ordre inférieur.

d'où $\frac{1}{\sqrt{S_n}}$ admet une espérance

4. Soit $\alpha \in]0,1[$.

$P(|T_n| \leq t_{n,\alpha})$

$= P\left(\left|\frac{Y}{\sqrt{S_n/n}}\right| \leq t_{n,\alpha}\right)$

$= P\left(|Y| \leq \sqrt{\frac{S_n}{n}}\, t_{n,\alpha}\right)$

$= 2\,\Phi\left(\sqrt{\frac{S_n}{n}}\, t_{n,\alpha}\right) - 1$ or Φ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$ (continue et strictement croissante)

$2\,\Phi\left(\frac{\sqrt{S_n}}{n} t_{n,\alpha}\right) - 1 = 1 - \alpha$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{S_n}{n}}\, t_{n,\alpha} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$

$\Leftrightarrow t_{n,\alpha} = \sqrt{\frac{n}{S_n}}\, \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ $t_{n,\alpha}$ existe et est unique car Φ^{-1} est bijective

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

5- a) Y et $\frac{1}{\sqrt{S_n}}$ admettent une espérance

donc T_n admet une espérance

or Y est indépendante des $(X_k)_{k\geq 1}$ donc par lemme des coalitions

Y et $\frac{1}{\sqrt{S_n}}$ sont indépendantes.

d'où $E(T_n) = \sqrt{n}\, E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right) E(Y) = 0$ car $E(Y)=0$

b) pour tout $n \geq 3$, $\frac{1}{\sqrt{S_n}}$ admet un moment d'ordre 2 (3-a)

et Y aussi donc T_n admet une variance

$V(T_n) = n\, V\left(Y \times \frac{1}{\sqrt{S_n}}\right)$

$= n\left(E\left(Y^2 \frac{1}{S_n}\right) - E\left(Y \frac{1}{\sqrt{S_n}}\right)^2\right)$

or Y^2 et $\frac{1}{S_n}$ sont indépendants par lemme des coalitions

d'où $V(T_n) = n E(Y^2) E\left(\frac{1}{S_n}\right) - 0$ car $E\left(Y \frac{1}{\sqrt{S_n}}\right) = E(Y) E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right) = 0$

$= \frac{n}{n-2}$ car $E(Y^2) = 0$

6/20

c)

$\forall n \geq 3$, $E\left((T_n - Y)^2\right) = V(T_n - Y) + E(T_n - Y)^2$ (formule de Koenig-Huygens)

$= V(T_n) + V(Y) - 2\operatorname{cov}(T_n, Y) + E(T_n)^2 + E(Y)^2 - 2E(T_n Y)$

$= \frac{n}{n-2} + 1 - 2\left(E(T_n Y) - E(T_n)E(Y)\right) - 2E(T_n Y)$

$= \frac{2n-2}{n-2} - 4E(T_n Y)$

or $T_n Y = \sqrt{n}\frac{Y^2}{\sqrt{S_n}}$ donc $E(T_n Y) = \sqrt{n}E(Y^2)E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right)$ (lemme des coalitions)

d'où $E((T_n - Y)^2) = \frac{2n-2}{n-2} - \sqrt{2}\sqrt{n}E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$ car $E(Y^2) = 1$

6. a)

$\forall n \geq 2$, $u_{n+1} - u_n = E\left(\frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}}\right) - E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$

or $W_{n+1} = W_n + \frac{X_{n+1}^2}{2}$ (les W_n sont positifs comme somme de termes positifs)

d'où $W_{n+1} \geq W_n \Rightarrow \sqrt{W_{n+1}} \geq \sqrt{W_n}$ $x \mapsto \sqrt{x}$ croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (strictement)

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}} \leq \frac{1}{\sqrt{W_n}}$ par croissance de l'espérance il vient :

$\forall n \geq 2$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante

b) $\forall n \geq 2$, $u_{n+1} u_n = E\left(\frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}}\right)E\left(\frac{1}{W_n}\right)$

c) def suite_u(n) :
U = np.zeros(n-1)

d) la suite $(u_n^2)_{n\geq 2}$ semble converger vers 2.

e) $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ car $\forall n \geq 2$, $u_n \neq 0$

donc $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n-1}$ (6b)

$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$

d'où $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n}}$

7) soit $\varepsilon > 0$ $(T_n - Y)^2$ admet une espérance et est positive car T_n et Y admettent une variance

$$P(|T_n - Y| > \varepsilon) = P(|T_n - Y|^2 > \varepsilon^2)$$

$$\leq \frac{E((T_n-Y)^2)}{\varepsilon^2}$$ (inégalité de Markov)

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\left|\frac{2n-2}{n-2} - \sqrt{2n}\, u_n\right|$$ (d'après 5c)

et $\sqrt{2n}\, u_n \sim \frac{\sqrt{2n}\sqrt{2}}{\sqrt{n}} = 2$ donc $\sqrt{2n}\, u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$

et $\frac{2n-2}{n-2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$

d'où par passage à la limite $\frac{E((T_n-Y)^2)}{\varepsilon^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

par encadrement $P(|T_n - Y| > \varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ $T_n \xrightarrow{P} Y$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 645638

Code épreuve : 283	Nombre de pages : 18	Session : 2025

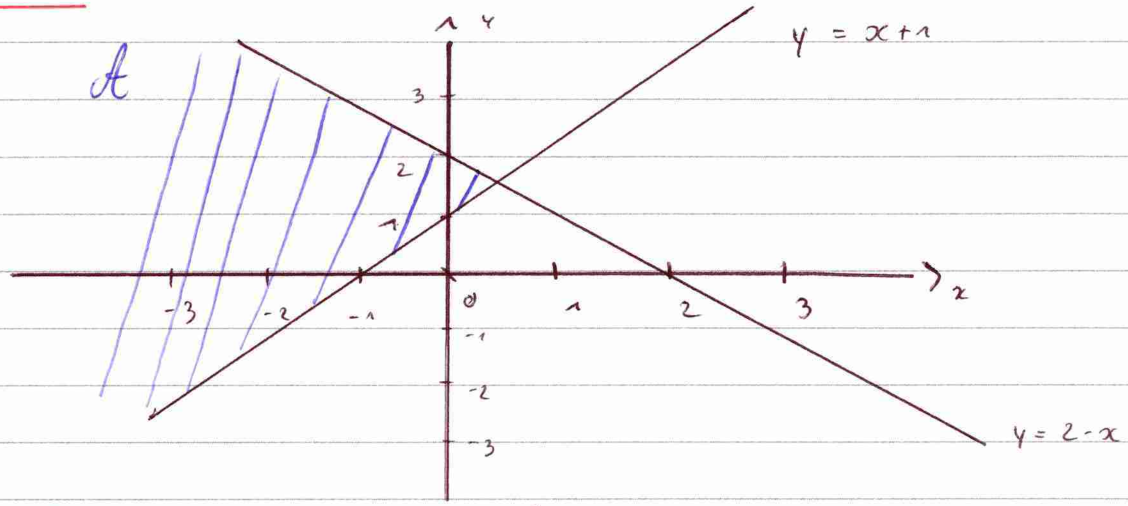
Épreuve de : Mathématiques 2 Approfondies ESCP BS – HEC PARIS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Partie II /

8)



$\mathcal{A} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+y \leq 2 \text{ et } x-y \leq -1 \}$

9 - a) Soit $y \in \mathbb{R}$, $y \geq \frac{a-b}{2}$ Soit $x \in \mathbb{R}$.

$(x,y) \in \mathcal{A} \iff x+y \leq a$ et $x-y \leq b$

$\iff x \leq a-y$ et $x - y \leq b$.

or $2y + b \geq a$ donc si $x+y \leq a$ alors $x+y \leq 2y+b \iff x-y \leq b$

d'où $(x,y) \in \mathcal{A} \iff x \in]-\infty, a-y[$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x,y)\, \varphi(x)\, dx$

$= \int_{-\infty}^{a-y} \varphi(x)\, dx$

$= \Phi(a-y)$

$(x,y) \in \mathcal{A}$

$\Leftrightarrow x+y \leq a$ et $x-y \leq b$

$\Leftrightarrow x+y \leq a$ et $x \leq b+y$

or $b \leq a-2y$

donc $x \leq a-y$

d'où $(x,y) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow x \in]-\infty, b+y[$

10- soit $y \geq d = \frac{a-b}{2}$ et $x \in \mathbb{R}$

on montre comme à la question précédente que $(x,y) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow x \in]-\infty, b+y]$

d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x,y)\, \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{b+y} \varphi(x)\, dx = \Phi(b+y)$

11- a) posons $f : (x,y) \mapsto x+y$ et $g : (x,y) \mapsto x-y$.

f et g sont continues sur $\mathbb{R}^2$ (polynômes)

et $\mathcal{A} = f^{-1}(]-\infty, a]) \cap g^{-1}(]-\infty, b])$

$]-\infty, a]$ et $]-\infty, b]$ sont fermés

donc $f^{-1}(]-\infty, a])$ et $g^{-1}(]-\infty, b])$ sont fermés car f et g sont continues

une intersection de deux fermés est fermée

d'où $\mathcal{A}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$

b)

$$P((X,Y)\in \mathcal{A}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_A(x,y)\varphi(x)\,dx\right)\varphi(y)\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{d}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_A(x,y)\varphi(x)\,dx\right)\varphi(y)\,dy + \int_{d}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_A(x,y)\varphi(x)\,dx\right)\varphi(y)\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{d} \phi(b+y)\varphi(y)\,dy + \int_{d}^{+\infty} \phi(a-y)\varphi(y)\,dy$$

les integrals sont bien convergents car $0 \leq |\phi(\alpha)\varphi(y)| \leq |\varphi(y)|$.

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\left[\phi(b+y) + \phi(a-y)\right] dy$$

posons $z = y - d$ (strictement croissante, $\mathcal{C}^1$ et bijectif de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z+d)\left[\phi(z+c) + \phi(-z+c)\right] dz$$

12 . $P((X,Y)\in\mathcal{A}) = \int_0^{+\infty} (\varphi(d+z) + \varphi(d-z))\,\phi(c-z)\,dz$.

$$= \int_0^{+\infty}\left((\varphi(d+z) + \varphi(d-z))\int_{-\infty}^{c-z} \varphi(x)\,dx\right) dz$$

posons $t = x + z$. donc $\int_{-\infty}^{c-z} \varphi(x)\,dx$.

$t \mapsto t+z$ est strictement croissant, de classe $\mathcal{C}^1$ et bijectif de $]-\infty, c-z]$ dans $]-\infty, c]$.

d'où $\int_{-\infty}^{c-z} \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} \varphi(t-z)\,dt$.

d'où $P((X,Y)\in\mathcal{A}) = \int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{c}[\varphi(d+z)+\varphi(d-z)]\,\varphi(t-z)\,dt\right) dz$

13 - $\varphi(u)\varphi(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}}$

$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}$

et $\varphi\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)\varphi\left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right)^2\right]\right)$

$= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(u^2+v^2+2uv+u^2+v^2-2uv)\right)\right)$

$= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}(u^2+v^2)\right)$

d'où $\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2,\ \varphi(u)\varphi(v) = \varphi\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)\varphi\left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right)$

14 - $P((X,Y)\in A) = \int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{c}(\varphi(d+z)+\varphi(d-z))\varphi(t-z)\,dt\right)dz$ (q°12)

$= \int_{-\infty}^{c}\left(\int_0^{+\infty}\varphi(d+z)\varphi(t-z)\,dz + \int_0^{+\infty}\varphi(d-z)\varphi(t-z)\,dz\right)dt$

or $\int_0^{+\infty}\varphi(d+z)\varphi(t-z)\,dz = \int_0^{+\infty}\varphi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right)\varphi\left(\frac{d-t+2z}{\sqrt{2}}\right)dz$ (q°13 avec $u=d+z$ et $v=t-z$)

$= \varphi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right)\int_0^{+\infty}\varphi\left(\frac{d-t+2z}{\sqrt{2}}\right)dz$

posons $u = \frac{d-t}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}z$ (strictement croissant, $\mathcal{C}^1$ et bijectif de $\mathbb{R}_+$ dans $\left[\frac{d-t}{\sqrt{2}};+\infty\right[$)

$\int_0^{+\infty}\varphi\left(\frac{d-t+2z}{\sqrt{2}}\right)dz = \int_{\frac{d-t}{\sqrt{2}}}^{+\infty}\varphi(u)\frac{du}{\sqrt{2}} = \frac{1-\Phi\left(\frac{d-t}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}} = \frac{\Phi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}}$

d'où $\int_0^{+\infty}\varphi(d+z)\varphi(t-z)\,dz = \varphi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right)\Phi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right)\times\frac{1}{\sqrt{2}}$

de même on trouve $\int_0^{+\infty}\varphi(d-z)\varphi(t-z)\,dz = \varphi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right)\Phi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right)\times\frac{1}{\sqrt{2}}$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 645638

Emplacement QR Code	Code épreuve : 283	Nombre de pages : 18	Session : 2025
	Épreuve de : Mathématiques Approfondies 2 ESCP BS - HEC PARIS		
	Consignes	• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre	

d'où $P((X,Y)\in \mathcal{A}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{c} \left(\varphi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right)\phi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right) + \varphi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right)\phi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right)\right) dt$

15- soit $B<0$

$I = \int_B^c \varphi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right)\phi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right) dt$

intégration par parties :

$u'(t) = \phi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right)$ $\quad u(t) = \sqrt{2}\,\varphi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right)$

$v(t) = \varphi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right)$ $\quad v'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\phi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right)$

$I = \left[\sqrt{2}\,\varphi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right)\varphi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right)\right]_B^c - \int_B^c \varphi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right)\phi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right) dt$

$= \left[\sqrt{2}\,\varphi(t)\,\varphi(d)\right]_B^c - \int_B^c \varphi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right)\phi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right) dt$ ...

16- X et Y sont deux variable indépendantes suivant une loi normale centrée réduite. (cf. autre partie de la question page 18)

$P((X,Y)\in \mathcal{A}) = P(X+Y\le a,\ X-Y\le b)$

$= P\left(W\le \frac{a}{\sqrt{2}},\ Z\le \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$

or $\phi\left(\frac{c+d}{\sqrt{2}}\right)\phi\left(\frac{c-d}{\sqrt{2}}\right) = \phi\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\phi\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right) = P((X,Y)\in \mathcal{A})$ (q°15)

d'où $P\left(W\le \frac{a}{\sqrt{2}},\ Z\le \frac{b}{\sqrt{2}}\right) = \phi\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\phi\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$

W et Z sont indépendants

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Partie III /

17 - a) soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, a_k \rangle a_k$ car $(a_1, \dots, a_n)$ est une base orthonormale

$\Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, a_k \rangle a_k$

$\Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) - \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} x_k\right) \frac{1}{\sqrt{n}} (1, \dots, 1) = \sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k \rangle a_k$

$\Leftrightarrow \sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k \rangle a_k = (x_1 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x})$

b) $\| \sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k \rangle a_k \|^2 = \sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k \rangle^2$ car $(a_1, \dots, a_n)$ est une base orthonormale

et $\| (x_1 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x}) \|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$

d'où $\sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k \rangle^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})$

18-a) $Y_1 = \langle (X_1, X_2), \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} \rangle = \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}$ donc $\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

de même $Y_2 = \langle (X_1, X_2), \frac{(1,-1)}{\sqrt{2}} \rangle = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}}$ car $(1,1) \perp (1,-1)$

et $\left\| \frac{(1,-1)}{\sqrt{2}} \right\| = 1$

donc $Y_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$, $Y_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$

et Y_1 et Y_2 sont indépendantes d'après le théorème de Cochran

b) si R_1 et R_2 sont indépendants

alors $\text{cov}(R_1, R_2) = 0$

si $\text{cov}(R_1, R_2) = 0$

alors $E(R_1 R_2) = E(R_1)E(R_2)$ (formule de Huygens)

19. a) $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, les X_i sont indépendantes

par stabilité de la loi normale $\overline{X} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$

b) $\overline{X} = \frac{Y_1}{\sqrt{n}}$ et $U = \sum_{k=2}^{n} Y_k^2$ (d'après 17-b)

c) d'après le théorème de Cochran les Y_k sont mutuellement indépendants donc par lemme des coalitions $\overline{X}$ et U sont indépendants

$U \hookrightarrow \chi^2(n-1) \iff \frac{1}{2}U \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)$ (2-c)

or $\frac{1}{2}U = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} Y_k^2$ or $\sum_{k=2}^{n} Y_k^2$ est une somme de n-1 variables normales centrées réduites au carré mutuellement indépendantes

or on peut montrer que si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ alors $\frac{X^2}{2} \hookrightarrow \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Preuve : soit $x \in \mathbb{R}_-$ $P(X^2 \leq x) = 0$

soit $x \in \mathbb{R}_+$, $P\left(\frac{X^2}{2} \leq x\right) = P(|X| \leq \sqrt{2x})$

$= 2\Phi(\sqrt{2x}) - 1$

cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en 0
(composée)

par dérivation et prolongement arbitraire en 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{\frac{X^2}{2}}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2} & x \geq 0 \end{cases}$$

or $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (2.b)

d'où $\frac{X^2}{2} \hookrightarrow \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

d'où $\frac{1}{2} U \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \iff U \hookrightarrow \chi^2(n-1)$

20-a) $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $Z_i = \sigma X_i + \mu$

$$\overline{Z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(\sigma X_i + \mu) = \sigma\overline{X} + \mu$$

$$V = \sum_{i=1}^n (Z_i - \overline{Z})^2 = \sum_{i=1}^n (\sigma X_i + \mu - \sigma\overline{X} - \mu)^2$$

$$= \sum_{i=1}^n (\sigma(X_i - \overline{X}))^2 \ldots$$

$$= \sigma^2 U$$ donc $V = \sigma^2 U$

b) $\frac{1}{n-1}V$ ne dépend que des observations donc $\frac{1}{n-1}V$ est un estimateur de σ^2

les Z_i admettent des moments d'ordre 2 donc $\frac{1}{n-1}V$ admet une espérance

par linéarité : $E(V) = \sigma^2 E(U)$ or $U \hookrightarrow \chi^2(n-1)$ (19.c)

donc $E(U) = n-1$ (1.a)

d'où $E(V) = (n-1)\sigma^2$ et $E\left(\frac{1}{n-1}V\right) = \sigma^2$ $\frac{1}{n-1}V$ est un estimateur sans biais de σ^2

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 645638

Emplacement QR Code	Code épreuve : 283	Nombre de pages : 18	Session : 2025
	Épreuve de : Mathématiques 2 Approfondies ESCP BS - HEC PARIS		
	Consignes	• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre	

c) $\dfrac{\overline{Z}-\mu}{\sqrt{\frac{V}{n(n-1)}}} = \sqrt{n}\sqrt{n-1}\ \dfrac{\overline{Z}-\mu}{\sqrt{\sigma^2 U}}$ car $V = \sigma^2 U$ (20-a)

$= \sqrt{n-1}\sqrt{n}\left(\dfrac{\overline{Z}-\mu}{\sigma}\right) \times \dfrac{1}{\sqrt{U}}$

or $\sqrt{n}\left(\dfrac{\overline{Z}-\mu}{\sigma}\right) \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ $\quad U \hookrightarrow \chi^2(n-1)$

d'où $\sqrt{n-1}\left(\dfrac{\overline{Z}-\mu}{\sigma}\right) \times \dfrac{1}{\sqrt{U}} \hookrightarrow \mathcal{T}(n-1)$

c'est-à-dire $\dfrac{\overline{Z}-\mu}{\sqrt{\frac{V}{n(n-1)}}} \hookrightarrow \mathcal{T}(n-1)$

21- Soit $\alpha \in]0,1[$ et $t_{n-1,\alpha}$ tel que $P(|T| \leq t_{n-1,\alpha}) = 1-\alpha$.
(existe d'après 4)

$P(|T| \leq t_{n-1,\alpha})$

$= P\left(\left|\dfrac{\overline{Z}-\mu}{\sqrt{\frac{V}{n(n-1)}}}\right| \leq t_{n-1,\alpha}\right)$

$= P\left(-\sqrt{\frac{V}{n(n-1)}}\, t_{n-1,\alpha} + \overline{Z} \leq \mu \leq \sqrt{\frac{V}{n(n-1)}}\, t_{n-1,\alpha} + \overline{Z}\right)$

$\left[-\sqrt{\frac{V}{n(n-1)}}\, t_{n-1,\alpha} + \overline{Z}, \sqrt{\frac{V}{n(n-1)}}\, t_{n-1,\alpha} + \overline{Z}\right]$ est un intervalle de confiance de μ au niveau de confiance $1-\alpha$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Retour sur la question 16

$\frac{X}{\sqrt{2}}$ et $\frac{Y}{\sqrt{2}}$ sont indépendantes et suivent une loi normale (par lemme des coalitions)
de paramètre 0 et $\frac{1}{2}$ par stabilité de la loi normale

$W \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ de même pour Z car $\frac{-Y}{\sqrt{2}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$

d'où $\frac{X+Y}{2} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $\frac{X-Y}{2} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751