Copie anonyme - n°anonymat : 645638

V9-00108
645638
Mat Appro

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 24

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EMLYON BS

Consignes
• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
• Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème 1 :

I/

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto (1-t^2)^n$ est continue sur $[0,1]$ et sur $[-1,1]$ comme composée de fonctions continues sur ces intervalles donc I_n et J_n sont bien définies pour tout $n \in \mathbb{N}$

de plus $t \mapsto (1-t^2)^n$ est paire

d'où $\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \, dt = 2\int_0^1 (1-t^2)^n \, dt$.

d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n = 2 I_n$

2. $I_0 = \int_0^1 1 \, dt = 1$

3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} \, dt - \int_0^1 (1-t^2)^n \, dt$.

$$= \int_0^1 (1-t^2)^n (1-t^2-1) \, dt.$$

$$= \int_0^1 (1-t^2)^n \times (-t^2) \, dt$$

or $\forall t \in [0,1]$, $(1-t^2)^n \geq 0$ et $-t^2 \leq 0$
par positivité de l'intégrale $(0<1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n \leq 0$

d'où (I_n) est décroissante

4. $\forall n \in \mathbb{N}^*$. $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \, dt$.

<u>par intégration par parties :</u> $u'(t) = 1$ $u(t) = t$

$v(t) = (1-t^2)^n$ $v'(t) = -2nt(1-t^2)^{n-1}$

$I_n = [t(1-t^2)^n]_0^1 + 2n\int_0^1 t^2(1-t^2)^{n-1} dt.$ <u>u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$</u>

$= 2n\int_0^1 (t^2-1+1)(1-t^2)^{n-1} \, dt.$

$= 2n[I_{n-1} - I_n]$

d'où $2n+1 I_n = 2n I_n$ $\Leftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$

5. $\forall n \in \mathbb{N}$, H_n : " $I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$ "

<u>$n=0$</u> : $I_0 = 1$ (q°2) et $\frac{(2^0 0!)^2}{1!} = 1$ H_0 vraie.

Soit $n \geq 0$, supposons H_n vraie.

$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} I_n$ (q°4)

$= \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} \times \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$ d'après H_n.

$= \frac{(2n+2)(2(n+1))(2^n n!)^2}{(2n+2)(2n+3)(2n+1)!}$

$= \frac{(2^{n+1}(n+1)!)^2}{(2n+3)!}$ H_{n+1} vraie

Conclusion : d'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$

6-
```
def I(n) :
    i = 1
    for k in range (1,n+1):
        i = 2*k*i / (2*k+1)
    return i
```

7. $J_n = 2 I_n$ (q°1)

donc $J_n = \dfrac{2\times(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$

or $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

donc $J_n \sim \dfrac{2\times(2^n)^2\, 2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{2\pi(2n+1)}\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}}$

$\sim \dfrac{\cancel{2}^{2n+1}\sqrt{\cancel{2}\pi}\sqrt{\cancel{n}}}{\sqrt{\cancel{2}}} \dfrac{n^{2n}}{e^{2n}} \times \dfrac{e^{2n+1}}{(2n)^{2n+1}}$

$\sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}} e$

...

II / soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$

8- $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt = \int_{-1}^{1} Q(t)P(t)\,dt = \langle P, Q\rangle$

symétrique

soit $(P_1, P_2, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\langle \lambda P_1 + P_2, Q\rangle = \int_{-1}^{1} (\lambda P_1 + P_2)(t) Q(t)\,dt.$

$= \lambda \int_{-1}^{1} P_1(t)Q(t)\,dt + \int_{-1}^{1} P_2(t)Q(t)\,dt$

$= \lambda \langle P_1, Q\rangle + \langle P_2, Q\rangle$ donc linéaire à gauche et par symétrie bilinéaire

$\langle P,P \rangle = \int_{-1}^{1} P^2(t)\,dt$ or $\forall t \in [-1,1]$, $P^2(t) \geq 0$

donc par positivité de l'intégrale $(-1 \leq 1)$, positive

et $\langle P,P \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} P^2(t)\,dt = 0$

or $\forall t \in [-1,1]$, $P^2(t) \geq 0$ donc par stricte positivité de l'intégrale, il vient $\forall t \in [-1,1]$, $P(t) = 0$
ce polynôme admet une infinité de racine il est donc nul.

d'où cette application est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive

c'est un produit scalaire

9. soit $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$ tels que $i \neq j$.

~~$\langle e_i, e_j \rangle = \int_{-1}^{1} t^{i+j}$~~ dt

~~si $i+j$ est impair alors $t \mapsto t^{i+j}$ est impaire donc son intégrale sur un~~

$\langle e_0, e_2 \rangle = \int_{-1}^{1} t^2\,dt = 2\int_0^1 t^2\,dt = 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} \neq 0$

NON les polynômes B_N ne sont pas deux à deux orthogonaux par ce produit scalaire.

10. soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$u(\lambda P + Q)(X) = \left((1-X^2)(\lambda P+Q)'(X)\right)'$

$= \left((1-X^2)\lambda P'(X) + (1-X)^2 Q'(X)\right)'$

$= \lambda u(P) + u(Q)$ u est linéaire soit $d = \deg P \qquad d \leq n$

$$\deg (1-X^2)P'(X) \leq \deg(1-X^2) + \deg P'(X)$$
$$\leq 2 + d - 1 = d-1.$$

et $\deg ([(1-X^2)P'(X)]') \leq d \leq n \qquad$ d'où $u(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

$u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$

11. a) $u(e_0) = ((1-X^2)\times 0)' = 0$

$u(e_1) = ((1-X^2)1)' = -2X = -2e_1$

b) soit $k \in [\![2,n]\!]$

$u(e_k) = ((1-X^2)kX^{k-1})'$

$= -2X\,kX^{k-1} + k(k-1)X^{k-2}(1-X)^2$

$= -2kX^k + k(k-1)X^{k-2}(1-2X+X^2)$

$= -2kX^k + k(k-1)X^{k-2} - 2k(k-1)X^{k-1} + k(k-1)X^k$

$= -k(k+1)X^k + k(k-1)X^{k-2}$

d'où $\forall k \in [\![2, n]\!],\ u(e_k) = -k(k+1)e_k + k(k-1)e_{k-2}$

c) $\mathrm{Mat}_{B_n}(u) =$

$$\begin{array}{cccccccc} u(e_0) & u(e_1) & & u(e_k) & & u(e_n) & \\ \left(\begin{matrix} 0 & 0 & & & & \\ & -2 & \ddots & & 0 & \\ & 0 & \ddots & k(k+1) & & \\ \vdots & \vdots & & 0 & \ddots & \\ & & & -k(k+1) & \ddots & n(n+1) \\ & & 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & & & -n(n+1) \end{matrix}\right) & & & & & & \begin{matrix} e_0 \\ e_1 \\ \\ e_{k-2} \\ e_{k-1} \\ e_k \\ e_n \end{matrix} \end{array}$$

c'est une matrice triangulaire supérieure donc son spectre vaut exactement ses coefficients diagonaux.

d'où $\mathrm{Sp}\, u = \{-k(k+1),\ k \in [\![0, n]\!]\}$

u admet $n+1$ valeurs propres distinctes et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$ donc tous les sous-espaces propres de u sont de dimension 1.

12.

13. a) ce polynôme existe, c'est le projeté orthogonal de f sur $\mathbb{R}_n[X]$ parallèlement à $\mathbb{R}_n[X]$, ce projeté est unique.

Supposons par l'absurde qu'il existe deux polynômes T_1 et T_2 qui vérifient cette égalité :

comme $\forall g \in \mathbb{R}_n[X]$, $\|f - T_1\| \leq \|f - g\|$

en particulier $\|f - T_1\| \leq \|f - T_2\|$

de même $\|f - T_2\| \leq \|f - T_1\|$ d'où $\|f - T_1\| = \|f - T_2\|$

or $f - T_1 \perp T_1$ d'où d'après Pythagore :

$\|f\|^2 = \|f - T_1\|^2 + \|T_1\|^2$ et $\|f\|^2 = \|f - T_2\|^2 + \|T_2\|^2$

d'où $\|T_1\|^2 = \|T_2\|^2$

$T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{L}_n$ en est une base

d'où : $\exists (c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $T_n = \sum_{k=0}^{n} c_k L_k$

$\forall k \in [\![0, n]\!]$, $c_k = \dfrac{\langle f, L_k \rangle}{\|L_k\|^2}$ car la base $\mathcal{L}_n$ est orthogonale, il suffit de la normaliser.

b. $f - T_n \perp T_n$

d'après le théorème de Pythagore

$\|f\|^2 = \|f - T_n\|^2 + \|T_n\|^2$

$\Leftrightarrow \|f - T_n\|^2 = \|f\|^2 - \|\sum_{k=0}^{n} c_k L_k\|^2$

$= \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 \|L_k\|^2$

car $\mathcal{L}_n$ est une famille orthogonale (théorème de Pythagore)

14- a)

$\deg P_k = 2K$ donc en dérivant k fois on a :

$\deg Q_k = 2k - k = k$

P_k est unitaire donc en dérivant k fois, le coefficient dominant de $P_k^{(k)}$ est $2k(2K-1)\dots(k+1) = \frac{(2k)!}{k!}$

d'où le coefficient dominant de Q_k est $\frac{(2k)!}{k!}$

b- $Q_0 = P_0 = 1$

$Q_1 = P_1' = 2X$

$Q_2 = P_2''$ or $P_2 = (X^2-1)^2$

d'où $P_2' = 4X(X^2-1)$

d'où $Q_2 = P_2'' = 12X^2 - 4$

c- i)

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, P_1(x) P_k'(x) = (x^2-1) 2kx (x^2-1)^{k-1}$
$= 2k e_1(x) P_k(x)$

ii) P_1 et P_k' sont $\mathcal{C}^\infty$ ce sont des polynômes ;

Soit $k \in [\![0, n]\!]$ fixé,

$\forall x \in \mathbb{R}, \left(P_1(x) P_k'(x)\right)^{(k+1)} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} P_1^{(i)}(x) P_k^{(k+1-i+1)}(x)$ $(*)$

or $P_1(X) = 1 - X^2$, $P_1'(X) = -2X$, $P_1''(X) = -2$ et $\forall k \geqslant 3$, $P^{(k)}(X) = 0$

$(*) = (1-x^2) Q_k''(x) - 2(k+1) Q_k'(x) - 2\frac{k(k+1)}{2} Q_k(x)$

de même avec l'autre formule e_1 et P_k sont aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$

$\forall x \in \mathbb{R}, \left(2k e_1(x) P_k(x)\right)^{(k+1)} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} 2k e_1(x)^{(i)} P_k^{(k+1-i)}(x)$ $(\triangle)$

Copie anonyme - n°anonymat : 645638

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 24	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies ECRICOME BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

$(\Delta) = 2kx\,Q_k'(x) + 2k(k+1)\,Q_k(x)$

d'où $(1-x^2)Q_k''(x) - 2(k+1)Q_k'(x) - k(k+1)Q_k(x) = 2kxQ_k'(x) + 2k(k+1)Q_k(x)$

$\Leftrightarrow (1-x^2)Q_k''(x) - 2xQ_k'(x) + k(k+1)Q_k(x) = 0$

$u(Q_k) = (1-X^2)Q_k''(X) - 2XQ_k'(X)$
$= -k(k+1)Q_k$ et $Q_k \neq 0$ car $\deg Q_k = k \geq 0$

donc Q_k est vecteur propre de u associé à $-k(k+1)$

iii) Soit $k \in [\![0,n]\!]$
L_k est vecteur propre de u associé à $-k(k+1)$ et Q_k aussi

or chaque sous-espace propre de u est de dimension 1. (11-c)

donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $L_k = \lambda Q_k$

or le coefficient dominant de Q_k est $\frac{(2k)!}{k!}$ et L_k est unitaire

d'où $\lambda = \frac{k!}{(2k)!}$ et $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $L_k = \frac{k!}{(2k)!} Q_k$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

d. $\forall k \in \mathbb{N}^*$ H_k : " $\forall (f,g) \in \mathbb{R}[X]^2, \int_{-1}^{1} f^{(k)}(t)g(t)\,dt = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left[f^{(k-1-j)}(t)\, g^{(j)}(t) \right]_{-1}^{1}$

$+ (-1)^k \int_{-1}^{1} f(t)\, g^{(k)}(t)\,dt$ ".

$k=1$: soit $(f,g) \in \mathbb{R}[X]^2$.

$\int_{-1}^{1} f'(t)g(t)\,dt$ intégration par parties : $u'(t) = f'(t)$ $u(t) = f(t)$
$v(t) = g(t)$ $v'(t) = g'(t)$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$.

$\int_{-1}^{1} f'(t)g(t)\,dt = \left[f(t)\, g(t) \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f(t)\, g'(t)\,dt$ H_1 vraie.

soit $k \geq 1$, supposons H_k vraie.

intégration par parties sur $[-1,1]$: $u'(t) = f^{(k+1)}(t)$ $u(t) = f^{(k)}(t)$
$v(t) = g(t)$ $v'(t) = g'(t)$.

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$.

$\int_{-1}^{1} f^{(k+1)}(t)g(t)\,dt = \left[f^{(k)}(t)\; g(t) \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f^{(k)}(t)\; g'(t)\,dt$.

$= \left[f^{(k)}(t)\, g(t) \right]_{-1}^{1} - \left(\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left[f^{(k-1-j)}(t)\; g^{(j+1)}(t) \right]_{-1}^{1} + (-1)^k \int_{-1}^{1} f(t) g^{(k+1)}(t)\,dt \right)$

$= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \left[f^{(k-j)}(t)\; g^{(j+1)}(t) \right]_{-1}^{1} + (-1)^{k+1} \int_{-1}^{1} f(t)\, g^{(k+1)}(t)\,dt$.

H_{k+1} vraie.

d'après le principe de récurrence H_k est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

e) i) On dérive un polynôme unitaire de degré $2n$, $2n$ fois. Sa dérivée $2n$-ième est donc la constante obtenue en multipliant les degrés de ses dérivées précédentes : $2n(2n-1)\dots 1$

d'où $\forall x \in \mathbb{R},\ P_n^{(2n)}(x) = (2n)!$

Soit $n \in [\![0, n]\!]$

ii) $\forall \ell \in [\![0, n]\!]$, H_ℓ : " $\exists R_{n,\ell} \in \mathbb{R}_\ell[X]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_n^{(\ell)}(x) = (x^2-1)^{n-\ell} R_{n,\ell}(x)$ "

$\ell = 0$, $R_{n,0} = 1$ convient. H_0 vraie.

Soit $\ell \in [\![0, n-1]\!]$, supposons H_ℓ vraie.

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\left(P_n^{(\ell)}\right)'(x) = 2x(n-\ell)(x^2-1)^{n-\ell-1} R_{n,\ell}(x) + R_{n,\ell}'(x)(x^2-1)^{n-\ell}$$

(d'après H_ℓ)

$$= (x^2-1)^{n-(\ell+1)}\left(2x(n-\ell)R_{n,\ell}(x) + (x^2-1)R_{n,\ell}'(x)\right)$$

en posant $R_{n,\ell+1}(x) = 2x(n-\ell)R_{n,\ell}(x) + (x^2-1)R_{n,\ell}'(x)$

ce polynôme convient car $\deg R_{n,\ell} \leq \ell$ donc $\deg R_{n,\ell+1} \leq \ell+1$.

$H_{\ell+1}$ vraie.

par principe de récurrence, $\forall \ell \in [\![0, n]\!]$, $P_n^{(\ell)}(x) = (x^2-1)^{n-\ell} R_{n,\ell}(x)$

iii) comme 1 et -1 est racine de $(x^2-1)^{\ell}$ pour tout $\ell \in [\![1, n-1]\!]$ et que $P_n(-1) = P_n(1) = 0$

$\forall \ell \in [\![0, n-1]\!]$, $P_n^{(\ell)}(-1) = P_n^{(\ell)}(1) = 0$

Problème 2 :

I/ 1- $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ car $1+x^2 \geq 0$.

de plus f est continue sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,dx = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,dx$ par parité de la fonction intégrée

de plus $\frac{1}{\pi(1+x^2)} \sim \frac{1}{\pi x^2}$ et $\frac{1}{\pi(1+x^2)} \geq 0$ or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge

d'après ~~le~~ le critère de Riemann $(2>1)$

donc par comparaison d'intégrale de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,dx$ converge.

et $\cancel{\int_0^1 \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,dx}$ $t \mapsto \frac{1}{\pi(1+t^2)}$ est continue sur $[0,1]$.

par somme de deux intégrales convergentes, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,dx$ converge

Soit $A>0$, $\frac{2}{\pi}\int_0^{A} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\arctan(x)\right]_0^A$

$= \frac{2}{\pi}\arctan(A) \xrightarrow[A \to +\infty]{} 1$

d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$ f est une densité de probabilité.

2. $t f(t) \sim \frac{1}{\pi t}$ or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\pi t}\,dt$ est divergente d'après le critère de Riemann. donc f n'admet pas d'espérance.

Elle n'admet donc pas de variance non plus.

Copie anonyme - n°anonymat : 645638

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 24	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EMLYON BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

3- $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi(1+t^2)}\,dt$.

Si $x < 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\pi(1+t^2)}\,dt - \int_{x}^{0} \frac{1}{\pi(1+t^2)}\,dt$

et $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\pi(1+t^2)}\,dt = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+t^2)}\,dt$ par parité de $t \longmapsto \frac{1}{\pi(1+t^2)}$

or soit $A > 0$, $\int_{0}^{A} \frac{1}{\pi(1+t^2)}\,dt = \frac{1}{\pi}\arctan(A)$ (cf. calcul q°1)

d'où $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+t^2)}\,dt = \frac{1}{2}$

d'où $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x)$

Si $x \geq 0$: $F(x) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\pi(1+t^2)}\,dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{\pi(1+t^2)}\,dt$.

$= \frac{1}{2} + \frac{\arctan(x)}{\pi}$

d'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{\arctan(x)}{\pi}$

F est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} > 0$

donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0,1[$ (fonction de répartition). F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$ d'après le théorème de la bijection monotone.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

soit $y \in]0,1[$.

$$y = \frac{1}{2} + \frac{\arctan(x)}{\pi}$$

$\Leftrightarrow \pi\left(y - \frac{1}{2}\right) = \arctan x$.

$\Leftrightarrow F^{-1}(y) = \tan\left(\pi\left(y - \frac{1}{2}\right)\right)$ car $]0,1[\subset [0, \frac{\pi}{2}[$ et

la tangente est bijective sur cet intervalle.

4- a) soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$

soit $x \in \mathbb{R}$

$P(Y \leq x) = P(U \leq F(x))$ car F bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$.

$= F(x)$

comme la fonction de répartition caractérise la loi. et que F_X et F_Y coincident sur $\mathbb{R}$

$Y = F^{-1}(U)$ suit la même loi que X

b)
```
def Cauchy ( ) :
    return (np. tan (np.pi * (rd.random() - 1/2)))
```

5- soit $x < 0$ $P(Z \leq x) = 0$

soit $x \in \mathbb{R}_+$ $P(Z \leq x) = P(|X| \leq x^2)$

$= F(x^2) - F(x^2)$ car X à densité.

F_Z est continue sur $\mathbb{R}$* et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en 0 ~~nombre fini de point~~ car F_X est une fonction de répartition d'une variable à densité et $x \mapsto x^2$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (composée)

* $\lim_{x \to 0} P(Z \leq x) = F(0) - F(0) = 0$ et continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-^*$

Z est à densité

par dérivation et prolongement arbitraire en 0

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x\left(f_X(x^2) + f_X(-x^2)\right) & x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{4x}{\pi(1+x^4)} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

6. Z admet une espérance $\iff \int_{-\infty}^{+\infty} t f_Z(t)\,dt$ converge absolument.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Z(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{4x^2}{\pi(1+x^4)}\,dx$$

et $\dfrac{4x^2}{\pi(1+x^4)} \sim \dfrac{4}{\pi x^2}$ $\quad \dfrac{4x^2}{\pi(1+x^4)} \geq 0$ et $\int_1^{+\infty} \dfrac{4}{\pi x^2}\,dx$ converge

d'après le critère de Riemann $(2>1)$

et $t \longmapsto \dfrac{4t^2}{\pi(1+t^4)}$ est continue sur $[0,1]$.

somme d'intégrale convergente de fonctions positives.

d'où $\int_0^{+\infty} t f_Z(t)\,dt$ converge absolument donc

Z admet une espérance

et $t^2 f_Z(t) \sim \dfrac{4}{\pi t}$ $\quad$ or $\int_1^{+\infty} \dfrac{4}{\pi t}\,dt$ diverge (critère de Riemann).

Z n'admet pas de moment d'ordre 2 donc de variance

7_a)

$$\frac{\alpha x(x^2+\sqrt{2}x+1)+\beta x(x^2-\sqrt{2}x+1)}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)x^3+\sqrt{2}(\alpha-\beta)x^2+(\alpha+\beta)x}{(x^2-\sqrt{2}x-1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}$$

il suffit de trouver $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que :

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \sqrt{2}(\alpha-\beta)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-\beta\\ \alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}\\ \beta=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{cases}$$

ce couple convient.

b_ $t\mapsto\frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1}$ et $t\mapsto\frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$

comme inverse de polynômes ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+$

et $\frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\sim\frac{1}{t^2}$ et $\frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\sim\frac{1}{t^2}$ or $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ converge

d'après le critère de Riemann $(2>1)$

donc $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1}dt$ converge donc par somme d'intégrales convergentes $\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1}dt$ et $\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}dt$ convergent

posons $u=\sqrt{2}x$ $\quad$ $t\mapsto\sqrt{2}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$,
$du=\sqrt{2}dx$ $\quad$ strictement croissante et bijective sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $[0;+\infty[$

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2\sqrt{x}+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\frac{u^2}{2}+u+1}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 645638

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 24	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EMLYON BS

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

c - $E(Z) = \int_0^{+\infty} \frac{4x^2}{\pi(1+x^4)}\,dx$

or $\frac{x^2}{(1+x^4)} = \frac{x^2}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}$

$= \frac{\alpha x}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\beta x}{x^2+\sqrt{2}x+1}$ (avec α et β trouvés à la q° 7-a)

$= \frac{\alpha}{2}\left(\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right) + \frac{\beta}{2}\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right)$

d'où $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$.

$= \alpha\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx - \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\frac{3\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \beta\int_0^{+\infty}\frac{x}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx$

$+ \frac{\sqrt{2}\beta}{2}\frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}\beta}{2}\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\pi}{4} + \alpha\int_0^{+\infty}\frac{x}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx + \beta\int_0^{+\infty}\frac{x}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx$

- - -

8-

II/

9- $\mathbb{1}_A$ est $\mathcal{B}(P(A))$ $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$ et $V(\mathbb{1}_A) = P(A)(1-P(A))$

10- a) • si $\omega \in [X > s]$. $\mathbb{1}_{[X>s]}(\omega) = 1$.

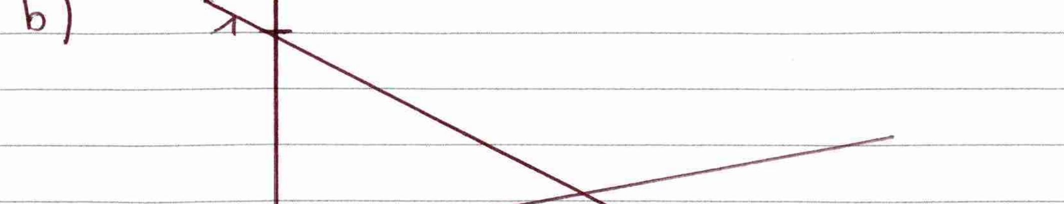
$\chi_{]s;+\infty[}(X(\omega)) = 1$ car $X(\omega) > s$ donc $\mathbb{1}_{[X>s]}(\omega) = \chi_{]s;+\infty[}(X(\omega))$

• si $\omega \notin [X > s]$. $\mathbb{1}_{[X>s]}(\omega) = 0$.

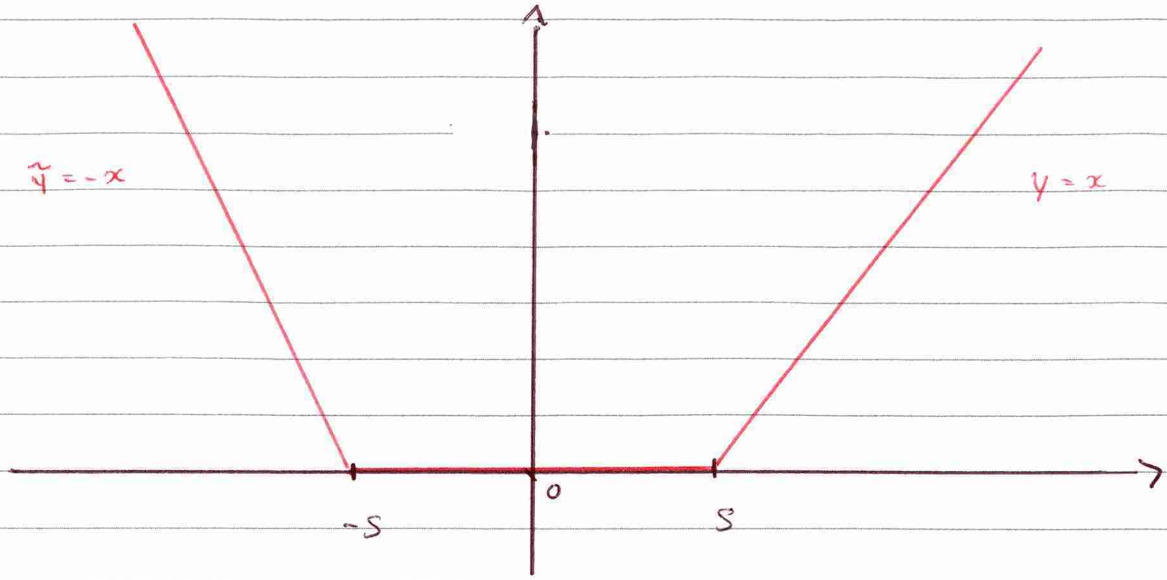
et $\chi_{]s;+\infty[}(X(\omega)) = 0$ car $X(\omega) \leq s$.

d'où $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{1}_{[X>s]}(\omega) = \chi_{]s;+\infty[}(X(\omega))$

b)



b)



$-s$ et s sont les points de discontinuité de φ_s

11. $\mathbb{1} = \mathbb{1}_{[|X_n| \leq n]} + \mathbb{1}_{[|X_n| > n]}$

car $([|X_n| \leq n], [|X_n| > n])$ est un système complet d'évènements

d'où $X_n = Y_n + Z_n$

$Y_n(\Omega) = [-n, n]$

12. Y_n admet un moment d'ordre 2 car est bornée

$E(Y_n^2) = E(X_n^2 \mathbb{1}^2_{[|X_n| \leq n]}) \leq n^2$

car si $|X_n| \leq n$ alors $X_k^2 \leq n^2$ et $E(X_n^2) \leq n^2$.

et si $|X_n| > n$ $X^2 \mathbb{1}^2_{[|X_n| \leq n]} = 0$ et $n^2 > 0$ dans tous les cas

$E(Y_n^2) \leq n^2$

13. a) $E(|Z_n|) = E(X_n \mathbb{1}_{[|X_n| > n]})$

$= E(\varphi_{]-\infty,-n[\cup]n,+\infty[}(X_n))$

b. $E(|Z_n|) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

et $0 \leq Z_n \leq |Z_n|$ car si $|X_n| \leq n$, $Z_n = 0$
sinon $Z_n > n > 0$

d'où $0 \leq E(Z_n) \leq E(|Z_n|)$
(croissance de l'espérance)

par encadrement : $E(Z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

c. ...

or $E(X_n) = E(Y_n) + E(Z_n)$ (linéarité)

et $E(Z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $E(X_n) - E(Y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

14. soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
par contraposée si $|x| \leq \frac{t}{2}$ et $|y| \leq \frac{t}{2}$

$|x+y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire)
$\leq t$

d'où $|x+y| > t \Rightarrow \left(\left[|x| > \frac{t}{2} \right] \text{ ou } \left[|y| > \frac{t}{2} \right] \right)$

15. $P(|\overline{X_n}| > t) = P(|\overline{Y_n} + \overline{Z_n}| > t)$
$\leq P\left(|\overline{Y_n}| > \frac{t}{2}\right) + P\left(|\overline{Z_n}| > \frac{t}{2}\right)$
(évènements disjoints)

Copie anonyme - n°anonymat : 645638

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 24

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques Approfondies ENCYOW BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

16- a) $P(|\overline{Z_n}| > \frac{t}{2})$

$= P(|\frac{1}{n}(Z_1 + \dots + Z_n)| > \frac{t}{2})$

$|\overline{Z_n}| > 0$ et admet une espérance car les Z_k en admettant une

d'après l'inégalité de Markov. et $E(\overline{Z_n}) = E(Z_1)$ car les Z_k ont même loi.

$P(|\overline{Z_n}| > \frac{t}{2}) \leq \frac{E(|\overline{Z_n}|)}{\frac{t}{2}} \leq \frac{2}{t} E(|Z_1|)$ (inégalité triangulaire)

b- $0 \leq P(|\overline{Z_n}| > \frac{t}{2}) \leq \frac{2}{t} E(|Z_1|)$

or $E(|Z_1|) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $\exists n_1 > 0, \forall n \geq n_1, |E(|Z_1|)| \leq \frac{\varepsilon t}{6}$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists n_1 > 0, \forall n \geq n_1, P(|\overline{Z_n}| > \frac{t}{2}) \leq \frac{\varepsilon}{3}$

17- a) $E(\overline{Y_n}^2) = E(\frac{1}{n^2}(\sum_{k=1}^{n} Y_k)^2)$

$= \frac{1}{n^2} E[(\sum_{k=1}^{n} Y_k)^2]$

$= \frac{1}{n^2} E(\sum_{k=1}^{n} Y_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} Y_i Y_j)$

$E(\overline{Y_n}^2) = \frac{1}{n^2}(\sum_{k=1}^{n} E(Y_k^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} E(Y_i Y_j))$

~~b- si $i \neq j$ Y_i et Y_j sont indépendants (lemme des coalitions)~~

~~donc~~ $\cancel{E(Y_iY_j) = E(Y_i)E(Y_j)}$

~~d'où~~ $\cancel{2\sum_{1\leq i<j\leq n} E(Y_iY_j) = 2\sum_{1\leq i<j\leq n} E(Y_i)E(Y_j)}$

$\cancel{= 2\sum_{1\leq i<j\leq n} E(Y_1)^2}$ ~~(les Y_i ont même loi)~~

d'après l'inégalité de Cauchy Schwartz.

$E(Y_iY_j) \leq E(Y_i)E(Y_j)$

d'où : $2\sum_{1\leq i<j\leq n} E(Y_iY_j) \leq 2\sum_{1\leq i<j\leq n} E(Y_1)^2$ (même loi)

$\leq 2\frac{n(n-1)}{2}E(Y_1)^2$

$\leq n(n-1)E(Y_1)^2$

c- $\forall n \in \mathbb{N}^*, E(Y_n^2) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} E(Y_k^2) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} E(Y_iY_j)\right)$ (17-a)

$\leq \frac{n\Pi^2}{n^2} + \frac{2}{n^2}\sum_{1\leq i<j\leq n} E(Y_iY_j)$ (Q°12)

$\leq \frac{\Pi^2}{n} + \frac{n-1}{n}E(Y_1)^2$

$\leq \frac{\Pi^2}{n} + E(Y_1)^2$

d- $E(Y_1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (13-c)

donc $\exists\, n_2 > 0, \forall n \geq n_2, E(Y_1)^2 \leq \frac{t^2\varepsilon}{12}$

e) $\underline{\text{si } \sigma \geq \sigma_2}$:

$P(|\overline{Y_n}| > \frac{t}{2})$

$= P(|\overline{Y_n}|^2 > \frac{t^2}{4})$

$|\overline{Y_n}|^2$ admet une espérance car Y_1^2 en admettant une (q° 12)

et $|\overline{Y_n}|^2 \geq 0$

d'après $\underline{\text{l'inégalité de Markov}}$:

$$P(|\overline{Y_n}| > \frac{t}{2}) \leq \frac{4E(\overline{Y_n}^2)}{t^2} \leq \frac{4}{t^2}\left(\frac{\sigma^2}{n} + E(Y_1)^2\right) \quad (17\text{-c})$$

$$\leq \frac{4\sigma^2}{t^2 n} + \frac{\varepsilon}{2} \quad (17d)$$

d'où $\underline{\text{si } \sigma \geq \sigma_2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(|\overline{Y_n}| > \frac{t}{2}) \leq \frac{4\sigma^2}{t^2 n} + \frac{\varepsilon}{3}}$

18. Soit $\sigma \geq \max(\sigma_1, \sigma_2)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(|\overline{X_n}| > t) \leq P(|\overline{Y_n}| > \frac{t}{2}) + P(|\overline{Z_n}| > \frac{t}{2}) \quad (q°15)$$

$$\leq \frac{4\sigma^2}{t^2 n} + \frac{\varepsilon}{3} + P(|\overline{Z_n}| > \frac{t}{2}) \quad (q°17e)$$

$$\leq \frac{4\sigma^2}{n t^2} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \quad (q°16b)$$

d'où $\underline{\text{si } \sigma \geq \max(\sigma_1, \sigma_2),\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(|\overline{X_n}| > t) \leq \frac{4\sigma^2}{nt^2} + \frac{2\varepsilon}{3}}$

19. d'où comme $\frac{4\sigma^2}{nt^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \left|\frac{4\sigma^2}{nt^2}\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

d'où $\forall n \geq \max(n_1, n_2, n_0)$, $P(|\overline{X_n}| > t) \leq \varepsilon$,

i.e. $\underline{\lim_{n \to +\infty} P(|\overline{X_n}| > t) = 0}$

2c. Cela montre que la moyenne empirique est un estimateur sans biais $\theta \in (H)$. ici $\theta = 0$.

Ce résultat illustre la loi faible des grands nombres :

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de VAR indépendantes ayant même espérance et même variance

alors $\overline{X}_n \longrightarrow m$ où $m = E(X_k)$ et $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$