Copie anonyme - n°anonymat : 645638

V9-00108
645638
Mat Appro

Code épreuve : 297 | **Nombre de pages :** 23 | **Session :** 2025

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EDHEC BS

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1 :

1-a) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$g'(x) \geq 0 \iff 1 - \ln x \geq 0 \iff 1 \geq \ln x \iff e \geq x$$

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$g(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

$g(e) = e^{-1}$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$$

et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparées

b) $\forall k \geq 3,\ e \leq k \leq k+1$

$\Rightarrow 1 \leq \ln k \leq \ln k+1$

$\Rightarrow 1 \geq \dfrac{\ln k}{k} \geq \dfrac{\ln k+1}{k+1}$ par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

d'où $\left(\frac{\ln k}{k}\right)_{k\geq 3}$ est décroissante

$\forall k \geq 4, \quad 2 \leq k$

$\Rightarrow \ln 2 \leq \ln k$

$\Rightarrow \frac{\ln k}{k} \leq \frac{\ln 2}{2}$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

d'où $\cancel{\forall k \geq 4}$, $\frac{\ln k}{k} \leq \frac{\ln 2}{2}$

2-a) $x \mapsto (x-n)\ln(x)$ est dérivable sur $]n;+\infty[$ par produit de fonctions dérivables sur $]n;+\infty[$

de même pour $x \mapsto -x\ln(x-n)$ d'où par somme

f_n est dérivable sur $]n,+\infty[$

$\forall x > n, \ f_n'(x) = \frac{x-n}{x} + \ln(x) - \frac{x}{x-n} - \ln(x-n)$

$= \frac{x-n}{x} - \frac{x}{x-n} + \ln\left(\frac{x}{x-n}\right)$

b) ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sa courbe représentative est en dessous de ses tangentes, en particulier en 1.

$f'(1)(t-1) + f(1) \geq f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ \ln t \leq t-1$

$\forall x > n, \; f_n'(x) = \ln\left(\frac{x}{x-n}\right) - \frac{x}{x-n} + \frac{x-n}{x}$

or $\ln\left(\frac{x}{x-n}\right) \leq \frac{x}{x-n} - 1$ et $\frac{x-n}{x} \leq 1$

car $n > x$

d'où $\forall x > n, \; f_n'(x) \leq 0$

f_n est strictement décroissante sur $]n, +\infty[$

c) soit $n \geq 2$.

f_n est continue, strictement décroissante de $[n+1, n+2]$ à valeur dans $[2\ln(n+2) - (n+2)\ln(2), \; \ln(n+1)]$ d'après le théorème de la bijection monotone, il existe un unique antécédent $x \in [n+1, n+2]$ tel que $f_n(x) = 0$ car $\ln(n+1) \geq 0$ et $2\ln(n+2) - (n+2)\ln(2) \leq 0$

donc $0 \in f_n([n+1, n+2])$

3. $f_n(n+2) \leq f_n(x_n) \leq f_n(n+1)$

$\Rightarrow \; n+1 \leq x_n \leq n+2$ car f_n strictement décroissante sur $]n, +\infty[$

$\Rightarrow \; 1 + \frac{1}{n} \leq \frac{x_n}{n} \leq 1 + \frac{2}{n}$ or $1 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ et $1 + \frac{2}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

par encadrement $\frac{x_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ ie $x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n$

4-a)

$\forall n \geq 2, \ f_n(x_n) = 0$

$\Rightarrow \forall n \geq 2, \ (x_n - n)\ln(x_n) - x_n \ln(x_n - n) = 0$

$\Rightarrow \forall n \geq 2, \ \ln(x_n - n) = \dfrac{x_n - n}{x_n} \ln(x_n)$ car $x_n \neq 0$ (car $n < x_n$)

b) $\dfrac{\ln(n+2)}{n+2} \leq \dfrac{\ln(x_n)}{x_n} \leq \dfrac{\ln(n+1)}{n+1}$ car g est décroissante sur $[e;+\infty[$

or $\dfrac{\ln(n+2)}{n+2} \xrightarrow[+\infty]{} 0$ et $\dfrac{\ln(n+1)}{n+1} \xrightarrow[+\infty]{} 0$ (croissances comparées)

d'où par encadrement $\dfrac{\ln(x_n)}{x_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $\dfrac{\ln(x_n - n)}{x_n - n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

d'où $x_n - n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

5-a) $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $\ln(1+u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$

$\ln(1 + n + u_n) = \ln x_n$

et $\dfrac{\ln x_n}{\ln n} = \ln(x_n - n) \longrightarrow 0$

b) $\ln(x_n - n) = \ln(1 + (x_n - n - 1)) = \ln(1 + u_n)$

et $(x_n - n)\dfrac{\ln(x_n)}{x_n} = \dfrac{(x_n - n)}{x_n} \ln(1 + n + u_n)$

Copie anonyme - n°anonymat : 645638

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 23	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EDHEC BS.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

or $\ln(1+o_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$ et $x_n \dfrac{(x_n-n)}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

donc $\dfrac{x_n-n}{x_n} \sim x_n \sim n$

et $\ln(1+n+o_n) \sim \ln(n)$ (5a)

d'où $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$

6. $\forall n \geq 2$ $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\ln n}{n}$ (série harmonique)

donc $\sum_{n\geq 2} \dfrac{\ln n}{n}$ est divergente or $\dfrac{\ln n}{n} \underset{+\infty}{\sim} u_n$ et $\dfrac{\ln n}{n} \geq 0$ (pour $n\geq 2$)

donc $\sum_{n\geq 2} u_n$ a même nature donc $\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge

et $\dfrac{(\ln n)^2}{n^2} = o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ par croissances comparées

or $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge d'après le critère de Riemann $3/2 > 1$.

et comme $\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)^2$ a même nature $\sum_{n\geq 2}\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)^2$ converge

d'où $\sum_{n\geq 2} u_n^2$ converge.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Exercice 2 :

1. a) soit $x \in F$

alors $p_F(x) = x$ par définition de la projection orthogonale

d'où $\|p_F(x)\| = \|x\|$ et $x \in \{x \in E, \|p(x)\| = \|x\|\}$.

$F \subset \{x \in E, \|p(x)\| = \|x\|\}$

b) $\forall x \in E$, $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^{\perp}$

d'où $p_F(x) \perp x - p_F(x)$ d'après le théorème de Pythagore

$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$ pour tout $x \in E$.

c) si $\|p_F(x)\| = \|x\|$

alors $\|x - p_F(x)\|^2 = 0 \Leftrightarrow x = p_F(x) \Leftrightarrow x \in F$

d'où $F = \{x \in E, \|p_F(x)\| = \|x\|\}$

$\forall x \in E$, $\|x - p_F(x)\|^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in E$, $\|x\|^2 \geq \|p_F(x)\|^2$

$\Leftrightarrow \forall x \in E$, $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$ (positivité de la norme)

2. a) Soit $x \in F_1 \cap F_2$.
$x = p_1(x) = p_2(x)$

$p_3(x) = p_1 \circ p_2(x) = p_1(x) = x$ donc $x \in F_3$

$F_1 \cap F_2 \subset F_3$

b) soit $x \in F_3$

$\|p_3(x)\| = \|p_1 \circ p_2(x)\| \leq \|p_2(x)\|$

$\Leftrightarrow \|x\| \leq \|p_2(x)\|$ car $x \in F_3$

or $\forall x \in E$, $\|p_2(x)\| \leq \|x\|$ donc $\|x\| = \|p_2(x)\|$ donc $x \in F_2$ (1-c)

d'où $\|p_1 \circ p_2(x)\| \leq \|p_2(x)\| \Leftrightarrow \|p_1(x)\| \leq \|x\|$ or $x \in F_3$ donc $\|p_3(x)\| = \|x\|$ d'où $\|p_1(x)\| = \|x\|$

d'où $x \in F_1$

c) on en déduit l'inclusion réciproque et donc $F_1 \cap F_2 = F_3$

d) p_3 est un projecteur orthogonal donc c'est un endomorphisme symétrique.

d'où $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle p_3(x), y \rangle = \langle x, p_3(y) \rangle$

d'où $\langle p_1 \circ p_2(x), y \rangle = \langle x, p_1 \circ p_2(y) \rangle$

or $\langle p_1 \circ p_2(x), y \rangle = \langle p_2(x), p_1(y) \rangle$ car p_1 est symétrique.

et $\langle p_2 \circ p_1(x), y \rangle = \langle p_1(x), p_2(y) \rangle$. car p_2 est symétrique

d'où $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle p_1 \circ p_2(x), y \rangle = \langle p_2 \circ p_1(x), y \rangle$

e) on a donc par bilinéarité du produit scalaire

$\langle p_1 \circ p_2(x) - p_2 \circ p_1(x), y \rangle = 0$ ceci étant vrai pour tout $y \in E$

alors $\forall x \in E$, $p_1 \circ p_2(x) = p_2 \circ p_1(x)$ d'où $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$

3-a) $p^2 = p_1 \circ p_2 \circ p_1 \circ p_2$
$= p_1 \circ p_1 \circ p_2 \circ p_2$
$= p_1^2 \circ p_2^2$
$= p_1 \circ p_2$ car p_1 et p_2 sont des projecteurs
$= p$

d'où $p^2 = p$ et p est linéaire donc p est un projecteur

b) $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle p(x), y \rangle$
$= \langle p_2(x), p_1(y) \rangle$
$= \langle x, p(y) \rangle$

p est symétrique

c) p est un projecteur (3-a) et est symétrique (3b) donc c'est un projecteur orthogonal sur F_3

4- si p_1 et p_2 sont des projecteurs orthogonaux sur F_1 (respectivement F_2) qui commutent alors $p_1 \circ p_2$ est un projecteur orthogonal sur $F_1 \cap F_2$

Exercice 3 :

I/

1) $\forall x \in \mathbb{R}_-$, $-2x e^{-x^2} \geq 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$

f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-$ (produit et composée de fonctions continues) (car $x \mapsto -x^2$ est continue sur $\mathbb{R}_-$ à valeurs dans $\mathbb{R}_-$ et $x \mapsto \exp(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_-$)

f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0

Copie anonyme - n°anonymat : 645638

Code épreuve : 297 **Nombre de pages :** 23 **Session :** 2025

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EDHEC BS

Emplacement QR Code

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} -2xe^{-x^2}\,dx$$

$$= -2\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx$$

soit $\varepsilon > 0$: $\int_{\varepsilon}^{0} -2xe^{-x^2}\,dx = [e^{-x^2}]_{\varepsilon}^{0} = 1 - e^{-\varepsilon^2} \xrightarrow[\varepsilon \to -\infty]{} 1$

d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$

f peut être considérée comme une densité de probabilité

~~soit $\varepsilon < 0$.~~

~~intégration par parties sur $[\varepsilon, 0]$.~~ ~~$u'(x) = x$~~ ~~$u(x) = \frac{x^2}{2}$~~

~~$v(x) = e^{-x^2}$~~ ~~$v'(x) = -2x\,e^{-x^2}$~~

~~$\int_{\varepsilon}^{0} -2xe^{-x^2}\,dx = -2[\frac{x^2}{2}e^{-x^2}]_{\varepsilon}^{0} - 4$~~

2_ soit $x > 0$, $P(X \leq x) = 1$

soit $x \leq 0$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} -2te^{-t^2}\,dt$

soit $\varepsilon < x$ $\int_{\varepsilon}^{x} -2te^{-t^2}\,dt = [e^{-t^2}]_{\varepsilon}^{x} = e^{-x^2} - e^{-\varepsilon^2} \xrightarrow[\varepsilon \to -\infty]{} e^{-x^2}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

d'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

3- $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$

4. X admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt$ converge absolument

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} -2t^2 e^{-t^2}\, dt$$

$$= -2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{0} \frac{t^2 e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\, dt.$$

$$= 2\sqrt{\pi} \times \frac{1}{2} E(Y^2) \quad \text{où } Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \tfrac{1}{2})$$

or $E(Y^2) = V(Y) + E(Y)^2$ (formule de Koenig-Huygens)

$= \frac{1}{2}$

d'où X admet une espérance et $E(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

5 - $\forall x \geqslant 0$, $G(x) = P(X^2 \leqslant x)$

$= P(|X| \leqslant \sqrt{x})$

$= F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})$ car X est à densité

$x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ à valeur dans $\mathbb{R}_+$ et F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

de même $x \mapsto -\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_-$ et F est dérivable sur $\mathbb{R}$. donc G est dérivable sur $\mathbb{R}$.

($G(x)=0$ si $x<0$)

par dérivation et prolongement arbitraire en 0

$$\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(0+2\sqrt{x}e^{-x}\right) & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & x<0\\ e^{-x} & x\geq 0\end{cases}$$

$Z \sim \mathcal{E}(1)$

6- donc X admet une variance car Z admet une espérance

et $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$ (formule de Koenig-Huygens)

$= 1-\frac{\pi}{4}$

7. $\Pi[i] = \text{rd.exponential}(1)$

```
def EsperanceX(n):
    return np.sum(simulX(n)) / n)
```

II/ 8- $\forall x\in[0,1],\ 2(1-x)\geq 0$

donc $\forall x\in\mathbb{R},\ h(x)\geq 0$ et h est continue sur $\mathbb{R}_-^*$, sur $[0,1]$
et sur $]1;+\infty[$.

donc h est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en 0 et en 1

$t\mapsto 2(1-t)$ est continue sur $[0,1]$

$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt = \int_0^1 2(1-t)\,dt$ converge et $\int_0^1 2(1-t)dt = [-(1-t)^2]_0^1 = 1$

donc h est une densité de probabilité

9) soit $x < 0$ $H(x) = 0$ soit $x > 1$ $H(x) = 1$

soit $x \in [0, 1]$

$$H(x) = \int_0^x 2(1-t)\,dt = [-(1-t)^2]_0^x = 1 - (1-x)^2$$

d'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-(1-x)^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

10. $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = P(\sqrt{n}(M_n - 1) \leq x)$

$$= P\left(M_n \leq \frac{x}{\sqrt{n}} + 1\right)$$

$$= P\left(\bigcap_{k=1}^{n} [Y_k \leq \frac{x}{\sqrt{n}} + 1]\right)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} P\left(Y_k \leq \frac{x}{\sqrt{n}} + 1\right)$$ (indépendance des Y_k)

$$= H\left(\frac{x}{\sqrt{n}} + 1\right)^n$$ (même loi des Y_k)

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = H\left(\frac{x}{\sqrt{n}} + 1\right)^n$

11. soit $y \in \mathbb{R}$.

$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{y}{n}\right)\right)$ or $\frac{y}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$$= \exp\left(n \ln\left(\frac{y}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

$$= \exp(y + o(1))$$ d'où $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^y$

12. $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = H\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\sqrt{n} \\ \left(1 - \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^2\right)^n & \text{si } x \in [-\sqrt{n}, 0] \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

or $-\sqrt{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$ donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad x \in [-\sqrt{n}, 0]$

d'où par passage à la limite :

$$F_n(x) \longrightarrow \begin{cases} e^{-x^2} & x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

d'où $T_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

Problème :

I/

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ B_n = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{4^n n!} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{4} \times \frac{\prod_{k=1}^{n} k+n}{\prod_{k=1}^{n} k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+n}{4k}$$

```
def B(n) :
    P = 1
    for k in range (1, n+1) :
        P = P*(k+n)/(4*k)
    return P
```

II/

2. $W_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \, dt = \frac{\pi}{2}$

$W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t \, dt = [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

3- $\forall n \geq 0$, $W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1}(t) dt - \sin^n(t) dt$

$= \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt \, (\sin(t) - 1) \, dt.$

or $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin t \geq 0$

et $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}$, $\sin(t) - 1 \leq 0$

et $t \mapsto \sin^n(t)(\sin t - 1)$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

par positivité de l'intégrale (W_n) est décroissante

4- $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t) dt$.

intégration par parties sur $[0, \frac{\pi}{2}]$: $u'(t) = \sin(t)$ $u(t) = -\cos t$
$v(t) = \sin^{n+1}(t)$ $v'(t) = (n+1)\cos(t)\sin^n(t)$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$W_{n+2} = [-\cos(t)\sin^{n+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \sin^n(t) dt.$

$= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(t)) \sin^n(t) \, dt$

$= (n+1) W_n - (n+1) W_{n+2}$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$

5 - $\forall n \in \mathbb{N}$, H_n : " $W_{2n} = \frac{\pi}{2} B_n$ et $W_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)B_n}$ "

$\underline{n=0}$: $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} B_0 = \frac{\pi}{2}$

$W_1 = 1$ et $\frac{1}{B_0} = 1$ donc H_0 est vraie.

$\forall n \geq 0$, supposons H_n vraie.

$$W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2} \frac{(2n)!}{4^n n! n!} \times \frac{\pi}{2} \quad (\text{d'après } H_n)$$

$$= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{4(n+1)^2 4^n n! n!} \times \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} B_{n+1}$$

et $W_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3} W_{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} \times \frac{1}{(2n+1)B_n}$ d'après H_n.

$$= \frac{(2n+2) 4^n n!^2}{(2n+3)(2n+1)(2n)!}$$

$$= \frac{(2n+2)^2 4^n (n!)^2}{(2n+3)(2n+2)!}$$

$$= \frac{4^{n+1} (n+1)!^2}{(2n+3)(2n+2)!}$$

$$= \frac{1}{(2n+3)B_{n+1}}$$

H_{n+1} est vraie.

d'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \frac{\pi}{2} B_n$ et $W_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)B_n}$

6 - $\forall n \in \mathbb{N}^*$, H_n : " $W_{2n-1} = \frac{1}{2nB_n}$ "

$\underline{n=1}$: $W_1 = 1$ et $\frac{1}{2B_1} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$ H_1 est vraie.

soit $n \geq 1$, supposons H_n vraie.

$$W_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)B_n} = \frac{(n!)^2 4^n}{(2n+1)(2n)!}$$

$$= \frac{(2n+2)^2 (n!)^2 4^n}{(2n+2)^2(2n+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!^2 4^{n+1}}{(2n+2)(2n+2)!}$$

$$= \frac{1}{(2n+2)B_{n+1}}$$

$\mathcal{U}_{n+1}$ est vraie

d'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ W_{2n-1} = \frac{1}{2nB_n}$

7 - (W_n) est décroissante. (q°3)

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ W_{2n+1} \leq W_{2n} \leq W_{2n-1}$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{(2n+1)B_n} \leq \frac{\pi}{2} B_n \leq \frac{1}{2nB_n}$

d'où $\frac{2}{(2n+1)\pi B_n} \leq B_n \leq \frac{1}{n\pi B_n}$

8 - $\frac{\sqrt{\pi n}}{\sqrt{\pi(n+1)}} \leq \sqrt{\pi n}\, B_n \leq 1$ et $\frac{\sqrt{\pi n}}{\sqrt{\pi(n+1)}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

par encadrement $\sqrt{\pi n}\, B_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ d'où $B_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 23	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EDHEC BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

III /

9-a) soit $k \in \mathbb{N}^*$ $\quad Y_k(\Omega) = \{0,1\}$

$P(Y_k = 0) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$ donc $Y_k \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})$

$E(Y_k) = \frac{1}{2}$ $\quad V(Y_k) = \frac{1}{4}$

b) $T_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum X_k = \sum_{k=1}^{n} Y_k$

les X_k sont indépendants donc par lemme des coalitions les Y_k le sont aussi et par stabilité de la loi binomiale : $T_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$

c) si tous les X_k valent 1 $S_n = n$, si ils valent tous -1 , $S_n = -n$

tous les cas intermédiaires sont possibles. d'où $S_n(\Omega) = \{2n-j, j \in [\![0,n]\!]\}$

soit $k \in S_n(\Omega)$

$[S_n = k]$ est réalisé si $2n-k$ X_k prennent la valeur 1 et k prennent la valeur -1. (si k est positif et inversement si k est négatif) on choisit donc $\binom{2n}{2n-k}$ variables qui prennent la valeur 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$ et on prend les k restantes aussi avec probabilité $\frac{1}{2}$

d'où $P(S_n = k) = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{k}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

10 a) $R_n = \text{Card}\{k \in [\![1, 2n]\!], S_k = 0\}$

or S_k ne peut valoir 0 que si k est pair

d'où $R_n = \text{Card}\{k \in [\![1, n]\!], S_{2k} = 0\}$

b) soit $k \in \mathbb{N}^*$,

$(S_{2k} = 0)$ est réalisé s'il y a autant de variable X_i qui prennent la valeur 1 que de variables qui prennent la valeur -1. soit k variables égales à 1 et k à -1.

d'où $P(S_{2k} = 0) = \binom{2k}{k} \frac{1}{2^k} \times \frac{1}{2^k}$

on choisit les k qui prennent la valeur 1 $\binom{2k}{k}$. elles sont de probabilité $\frac{1}{2}$

$= B_k$

c) $R_n = \sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}$

d) R_n admet une espérance car son support est fini

$E(R_n) = E(\sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}) = \sum_{k=1}^{n} E(1_{A_k})$ (linéarité de l'espérance)

$= \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$

$= \sum_{k=1}^{n} B_k$ (10 b)

d'où $E(R_n) = \sum_{k=1}^{n} B_k$

11- Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$f : t \mapsto \sqrt{t}$ est continue sur $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$

d'après le théorème des accroissements finis :

$\exists c \in]k, k+1[\;,\; f'(c) = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$

or $k < c < k+1$.

$\Rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{c}} < \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$

d'où $2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \dfrac{1}{\sqrt{k}}$

de même en appliquant le même théorème sur la même fonction sur $[k-1, k]$, il vient : $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \leq 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$

d'où $\forall k \in \mathbb{N}^*,\; 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \dfrac{1}{\sqrt{k}} \leq 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$

12. d'après 7. $\dfrac{1}{\sqrt{\pi(k+1)}} \leq B_k \leq \dfrac{1}{\sqrt{\pi k}}$

d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\pi(k+1)}} \leq E(R_n) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$

$\Rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq E(R_n) \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$

$\Rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{n+1} - 1) \leq E(R_n) \leq \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}$. (télescopage)

or $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{n+1} - 1) \times \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

d'où par encadrement $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} E(R_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ et $E(R_n) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$

IV /

13- a) d'après II-7, $B_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \binom{2n}{n} \times \frac{\sqrt{n\pi}}{4^n} = 1$

d'où $\frac{1}{\binom{2n}{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n\pi}}{4^n}$

b) $\forall x \in [0,4[$, $\frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n\pi}\left(\frac{x}{4}\right)^n$

et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \sqrt{n\pi}\left(\frac{x}{4}\right)^n \leq \frac{x\sqrt{\pi}}{4} n \left(\frac{x}{4}\right)^{n-1}$

or $\sqrt{\pi}\frac{x}{4} n \left(\frac{x}{4}\right)^{n-1}$ est le terme général d'une série géométrique dérivée d'ordre 1 convergente $\left(\left|\frac{x}{4}\right| < 1\right)$

d'où par comparaison de termes généraux de séries convergents

$\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ converge

14- soit $(x,y) \in [0,4[^2$ tels que $x \leq y$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x^n \leq y^n$ car $t \mapsto t^n$ est croissante sur $[0,4[$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \frac{y^n}{\binom{2n}{n}}$

d'où $f(x) \leq f(y)$ f est croissante sur $[0,4[$

15- a) ~~$\forall x \in [0,4[$, $\frac{x^n}{\binom{2n}{n}} = \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}$~~

~~et $\frac{1}{4\sqrt{(n+1)}} \leq B_n \leq \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$~~

Copie anonyme - n°anonymat : 645638

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 23 | Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EDHEC BS

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

15- a) $\forall x \in [0,4[$, $\sqrt{\pi}\sqrt{n}\, x^n \leq \frac{x^n}{B_n} \leq \sqrt{\pi(n+1)}\, x^n$ d'après 7.
car $x^n \geq 0$

$\Rightarrow \forall x \in [0,4[$, $\sqrt{\pi}\sqrt{n}\left(\frac{x}{4}\right)^n \leq \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sqrt{\pi}\sqrt{n+1}\left(\frac{x}{4}\right)^n$

et $\forall n \geq 1$, $1 \leq \sqrt{n}$ et $\sqrt{n+1} \leq n+1$

d'où $\forall x \in [0,4[$, $\forall n \geq 1$, $\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{4}\right)^n \leq \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sqrt{\pi}(n+1)\left(\frac{x}{4}\right)^n$

b) Soit $N \geq 1$. d'après 15 a) il vient :

$$\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{x}{4}\right)^n \leq \sum_{n=0}^{N}\frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{N}(n+1)\left(\frac{x}{4}\right)^n$$

et $\sum_{n=0}^{N}(n+1)\left(\frac{x}{4}\right)^n = \frac{x}{4}\sum_{n=1}^{N} n\left(\frac{x}{4}\right)^{n-1} + \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{x}{4}\right)^n$

toutes les séries en jeu sont convergentes d'où par conservation des inégalités par passage à la limite

$$\sqrt{\pi}\,\frac{1}{1-\frac{x}{4}} \leq f(x) \leq \sqrt{\pi}\left(\frac{x}{4}\,\frac{1}{(1-\frac{x}{4})^2} + \frac{1}{(1-\frac{x}{4})}\right)$$

d'où $\forall x \in [0,4[$, $\sqrt{\pi}\,\frac{x}{4-x} \leq f(x) \leq \sqrt{\pi}\left(\frac{x}{4}\,\frac{1}{(1-\frac{x}{4})^2} + \frac{x}{4-x}\right)$

or $\sqrt{\pi}\,\frac{x}{4-x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ et $\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{4}\,\frac{1}{(1-\frac{x}{4})^2} - \frac{x}{4-x}\right) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

d'où par encadrement $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

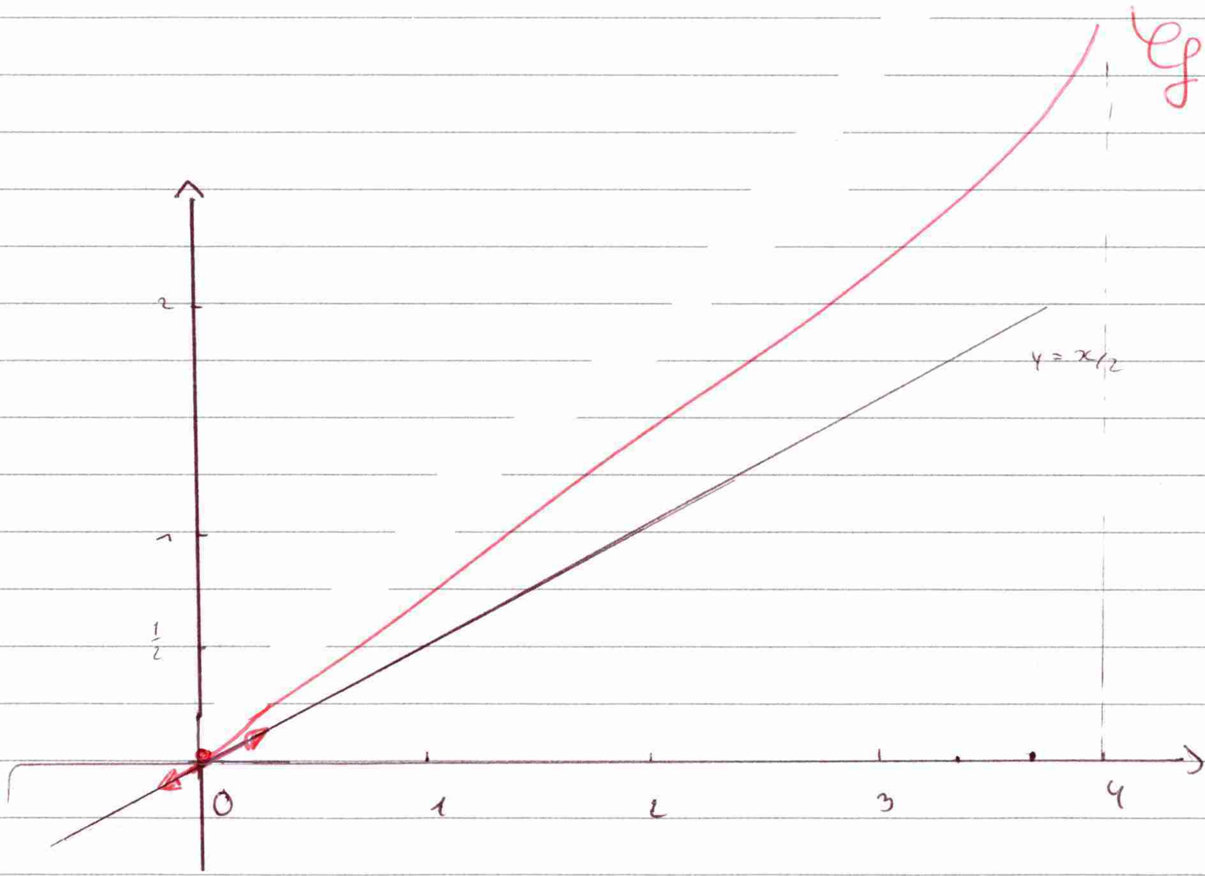
$\lim_{x \to 4^-} \sqrt{\pi}\ \frac{x}{4-x} = +\infty$

d'où $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

on en deduit que f est continue en 0 car $f(0) = 0$

16.

17.



Retour sur la question 16 du problème :

$f(x) \geq \frac{x}{2} \iff f(x) - \frac{x}{2} \geq 0$

montrons que $\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{4-x}\right) - \frac{x}{2} \geq 0$

notons $h : t \mapsto \sqrt{\pi}\left(\frac{t}{4-t}\right) - \frac{t}{2}$ h est dérivable sur $[0,4[$
(fraction rationelle et polynôme)

$\forall t \in [0,4[,\ h'(t) = \sqrt{\pi}\left(\frac{4-t+t}{(4-t)^2}\right) - \frac{1}{2}$

$= \frac{4\sqrt{\pi}}{(4-t)^2} - \frac{1}{2}$

montrons que $h_2(t) = \frac{4\sqrt{\pi}}{(4-t)^2} \geq \frac{1}{2}$ sur $[0,4[$

h_2 dérivable (fraction rationelle)

$\forall t \in [0,4[,\ h_2'(t) = 4\sqrt{\pi}\ \frac{2(4-t)}{(4-t)^3} \geq 0$ sur $[0,4[$

donc h_2 est croissante et $h_2(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \geq \frac{1}{2}$ ....

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751