Copie anonyme - n°anonymat : 595398

E6-00043
595398
Mat Appli

Code épreuve : 238	Nombre de pages : 38	Session : 2025

Épreuve de : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES (EDHEC BS)

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1a) f_n est dérivable sur $[0;1]$ car polynomiale et par linéarité de la dérivation :

$$\forall x \in [0;1] \quad f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k^2 x^{k-1} > 0$$

Conclusion : f_n est strictement croissante sur $[0;1]$

1b) On sait que :

✓ f_n est continue sur $[0;1]$ car polynomiale

✓ f_n est strictement croissante sur $[0;1]$ (q. 1a)

Ainsi, f_n induit une bijection de $[0;1]$ dans $f_n([0;1]) = [0; \frac{n(n+1)}{2}]$

Or puisque $n \geq 1$, on a bien $1 \in [0; \frac{n(n+1)}{2}]$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Conclusion : L'équation $f_n(x) = 1$, d'inconnue x, possède une seule solution, notée u_n, élément de $[0;1]$.

1c) Soit $x \in [0;1]$. On a,

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^{1} k x^k = x$$

Remarquons que $f_1(1) = 1$

Conclusion : $u_1 = 1$

2.

2a) Soit $x \in [0;1]$.

$$f_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} k x^k$$

$$= (n+1) x^{n+1} + f_n(x)$$

Conclusion : $\forall x \in [0;1] \quad f_{n+1}(x) = (n+1)x^{n+1} + f_n(x)$

2b) D'après le résultat établi à q. 2a), on en déduit,

$$\forall x \in [0;1] \qquad f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$$

d'où,

$$f_{n+1}(u_n) \geqslant f_n(u_n) = 1 \qquad (q.1b)$$

<u>Conclusion</u> : $f_{n+1}(u_n) \geqslant 1$

2c) On a, d'après q. 2b),

$$f_{n+1}(u_n) \geqslant 1$$

autrement dit,

$$f_{n+1}(u_n) \geqslant f_{n+1}(u_{n+1})$$

d'où par stricte croissance de f_n (q.1a),

$$u_n \geqslant u_{n+1}$$

<u>Conclusion</u> : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante

2d)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

D'après q.1b) $\quad u_n \in [0;1]$

De plus, $\quad u_n \geq u_{n+1}$

Conclusion: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée, d'après le théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

3.

3a) $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

3b) Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, posons $g : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} x^k$

- D'une part,

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\, x^{k-1}$$

(licite car g est dérivable car polynomiale et par linéarité de la dérivation)

- D'une autre part,

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n} x^k - 1 \quad \} \text{ q. 3a)}$$
$$= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 1$$

Copie anonyme - n°anonymat : 595398

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 38	Session : 2025

Épreuve de : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES (EDHEC BS)

En dérivant g sous cette forme,

$$g'(x) = \frac{n x^{n+1} - (n+1) x^n + 1}{(1-x)^2}$$

Conclusion : Des deux points précédents on en déduit,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \frac{n x^{n+1} - (n+1) x^n + 1}{(1-x)^2}}$$

3c) D'après la question 3b), on en déduit,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [0;1[\qquad f_n(x) = \frac{n x^{n+2} - (n+1) x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

4.

4a) Soit $x \in [0;1]$,

- $f_2(x) = x + 2x^2 = x(1+2x)$

$f_2(x) = 1 \Leftrightarrow x + 2x^2 - 1 = 0$ car $x \in [0;1]$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Ainsi,

$u_2 = \frac{1}{2}$

- Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0 (q.1b/q.2c), $(u_n)_{n\in[\![2;+\infty[\![}$ l'est aussi donc :

$\forall n \in [\![2;+\infty[\![\quad 0 \leq u_n \leq u_2$

d'où,

$\forall n \in [\![2;+\infty[\![\quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{Conclusion :} \\ \checkmark\ u_2 = \frac{1}{2} \\ \checkmark\ \forall n \in [\![2;+\infty[\![\quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2} \end{array}}$

4b) • Pour n suffisamment proche de $+\infty$, on en déduit d'après q. 4a),

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$$

d'où par croissance de la fonction $\cdot^n$ sur $\mathbb{R}^+$,

$$0^n \leq u_n^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

d'où: par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^n = 0$

• De façon analogue pour n suffisamment proche de $+\infty$,

$$0 \leq n u_n^n \leq \frac{n}{2^n}$$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{2^n} = 0$ (par croissance comparée)

d'où: par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} n u_n^n = 0$

Conclusion: ✓ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^n = 0$
✓ $\lim\limits_{n \to +\infty} n u_n^n = 0$

4c) Soit $n \geq 2$.

En utilisant l'expression de f_n établie à q. 3c),

$$f_n(u_n) = \frac{n u_n^{n+2} - (n+1) u_n^{n+1} + u_n}{(1-u_n)^2} = 1$$

On a donc,

$$(1-u_n)^2 = n u_n^{n+2} - (n+1) u_n^{n+1} + u_n$$

donc,

$$1 - 2u_n + u_n^2 = n u_n^{n+2} - (n+1) u_n^{n+1} + u_n$$

Ainsi,

$$1 - 3u_n + u_n^2 = n u_n^{n+2} - (n+1) u_n^{n+1}$$

<u>Conclusion:</u>

$\forall n \geq 2 \quad u_n^2 - 3u_n + 1 = n u_n^{n+2} - (n+1) u_n^{n+1}$.

4d) En passant à la limite des l'égalité de la q. 4a),

$\ell^2 - 3\ell + 1 = 0$ (q. 4b, $\lim_{n\to+\infty} u_n^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} n u_n^n = 0$)

On a donc,

$\ell^2 - 3\ell + 1 = 0 \iff \left(\ell = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } \ell = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in [0;1]$ (q. 1b)

Ainsi, $\ell = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$\boxed{\text{Conclusion : } \ell = \frac{3-\sqrt{5}}{2}}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Exercice 2 :

1.

1a) On a :

✓ $E \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

✓ $O_{3,3} \in E$ donc E est non vide

✓ Montrons que est stable par combinaison linéaire.
Soient $A, B \in E$ et λ, μ, a et $b \in \mathbb{R}$

$$\lambda A(a,b) + \mu B(a,b) = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda a \\ \lambda b & \lambda(2a-b) & \lambda b \\ \lambda a & \lambda b & \lambda a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu a & \mu b & \mu a \\ \mu b & \mu(2a-b) & \mu b \\ \mu a & \mu b & \mu a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a(\lambda+\mu) & b(\lambda+\mu) & a(\lambda+\mu) \\ b(\lambda+\mu) & (2a-b)(\lambda+\mu) & b(\lambda+\mu) \\ a(\lambda+\mu) & b(\lambda+\mu) & a(\lambda+\mu) \end{pmatrix}$$

ainsi,

$$(\lambda A(a,b) + \mu B(a,b)) \in E$$

Conclusion : E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1b) $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & 2a-b & b \\ a & b & a \end{pmatrix} \;/\; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \;/\; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$

$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est :

✓ génératrice de E (par définition d'après ce qui précède)

✓ libre car constituée seulement de deux vecteurs non colinéaires

$\boxed{\text{Conclusion : ✓ La famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de E} \quad ✓ \dim(E) = \text{card}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 2}$

2) • Les matrices de E sont symétriques donc diagonalisables (théorème spectral)

• $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\text{Rg}(M(a,b)) < 3$ (car $C_1 = C_3$)

donc : les matrices de E ne sont pas inversibles.

3) On a,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2-3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $A = M(1,3)$

$\boxed{\text{Conclusion: } A \in E.}$

4. def mat A( )
return np. array([[1,3,1],[3,-1,3],[1,3,1]])

5.

5a) D'après q.2), A n'est pas inversible

$\boxed{\text{Conclusion: } 0 \text{ est valeur propre.}}$

5b) • $Rg\,(A-5I_3) = Rg \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

$= Rg\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right)$ } $C_3 = -C_1 - C_2$

$= rg\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ } $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires

$= 2$

donc $(A-5I_3)$ n'est pas inversible.
Ainsi, 5 est valeur propre de A.

- $\text{Rg}(A+4I_3) = \text{rg}\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$= \text{Rg}\left(\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}\right)$) $C_3 = 2C_2 - C_1$

$= \text{rg}\left(\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}\right)$) $\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires

$= 2$

Ainsi, $(A+4I_3)$ n'est pas inversible
d'où : -4 est valeur propre de A

<u>Conclusion :</u> ✓ $A - 5I_3$ n'est pas inversible donc 5 est valeur propre de A

✓ $A + 4I_3$ n'est pas inversible donc -4 est valeur propre de A.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

5c) • Base du sous-espace propre de A associé à la valeur propre 0 :

✓ Rg (A) = 2

donc par théorème du rang, $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = rg(A) + \dim(\ker(A))$
d'où : $\dim \ker(A) = 1$

Remarquons que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker(A)$.
La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est :

✓ libre car constituée d'un unique vecteur non nul

✓ de cardinal 1, égal $\dim(\ker(A))$

Ainsi, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base du sous-espace propre de A associé à la valeur propre 0.

• Base du sous-espace propre de A associé à la valeur propre 5 :

De façon analogue et à l'aide q. 5b),
la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base du sous-espace propre de A associé à la valeur propre 5.

- Base du sous-espace propre de A associé à la valeur propre -4 :

De façon analogue et à l'aide de q.5b),
la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base du sous-espace propre de A associé à la valeur propre -4.

- Posons $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

✓ Montrons la liberté de la famille (U, V, W).

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Supposons $aU + bV + cW = 0_{3,1}$.

$$aU + bV + cW = 0_{3,1} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Ainsi, la famille est libre.

✓ La famille (U, V, W) est :
- ✓ libre d'après ce qui précède
- ✓ de cardinal 3 égal à $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$

d'où : la famille (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

6) En utilisant la question précédente résultat (q.5c), d'après le théorème du rang,

$$\dim\left(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right) = \mathrm{Rg}\,(A-5I_3) + \dim\left(\ker\,(A-5I_3)\right)$$

d'où : $\mathrm{rg}\,(A-5I_3) = 2$

de même,

$$\dim\left(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right) = \mathrm{rg}\,(A+4I_3) + \dim\left(\ker\,(A+4I_3)\right)$$

d'où : $\mathrm{rg}\,(A+4I_3) = 2$

Conclusion :

$$\boxed{R_1 = R_2 = 2}$$

7.

7a) Soient $a,b \in \mathbb{R}$.

- Pour le vecteur U :

$$M(a,b)\,U = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & 2a-b & b \\ a & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= 0 \times U$$

- Pour le vecteur V :

$$M(a,b)\,V = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & 2a-b & b \\ a & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+b+a \\ 2a+b \\ 2a+b \end{pmatrix}$$

$$= (2a+b)\,V$$

Copie anonyme - n°anonymat : 595398

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 38 | Session : 2025

Épreuve de : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES (EDHEC BS)

Consignes
• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
• Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

. Pour le vecteur W :

$$M(a,b)W = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & 2a-b & b \\ a & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2a-2b \\ -4a+4b \\ 2a-2b \end{pmatrix}$$

$$= (2a-2b)\,W$$

Conclusion : U, V et W sont bien vecteurs propres de toutes les matrices de E

7b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Il suffit de diagonaliser n'importe quelle matrice de E (licite d'après q. 2), puis d'effectuer une récurrence (immédiate) afin d'obtenir une expression (matricielle) de la puissance n-ième de notre matrice.

Enfin, on élève la matrice diagonale de l'expression de notre matrice de E diagonalisée (ses coefficients

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

diagonaux sont élevés à la puissance) pour in-fine obtenir une expression de la puissance n-ième de n'importe quelle matrice de E.

7c)

```
def puissanceM(a,b,n)
    P= np.array([[1,0,-1],[1,1,1],[1,-2,1]])
    P'= al.inv(P)
  D**(n)= np.array([[0,0,0],[0,5^n,0],[0,0,-4^n]])
    Return np.dot(P, D**(n), P')
```

Exercice 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1) ✓ Positivité :

* sur $[0;n]$: f_n est positive

* sinon : f_n est nulle donc positive

Ainsi, f_n est positive sur $\mathbb{R}$.

✓ Continuité

* sur $]0;n[$: f_n est continue car polynomiale.

* sur $]-\infty;0[\cup]n;+\infty[$: f_n est continue car constante.

Ainsi, f_n est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellmt en 0 et n

✓ $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx$?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^n f_n(x)\,dx \quad \left(\text{car } f_n \text{ est nulle sur }]-\infty;0[\cup\ ]n;+\infty[\right)$$

$$= \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} dx$$

$$= -n\int_0^n -\frac{1}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} dx$$

$$= -n\left[\frac{1}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right]_0^n$$

$$= -n\left(\frac{1}{n}\left(1-\frac{n}{n}\right)^n - \frac{1}{n}\left(1-\frac{0}{n}\right)^n\right)$$

$$= \frac{n}{n}$$

$$= 1$$

d'où : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = 1$

$$\boxed{\text{Conclusion : } f_n \text{ est une densité}}$$

2..

2a) • Posons $g : x \mapsto 1 - \frac{x}{n}$

Par théorème de transfert (licite car g est continue sur $[0;n]$),

$1 - \frac{X_n}{n}$ admet une espérance si et seulement si, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_n(x)\,dx$ est absolument convergente

si et seulement si, $\displaystyle\int_{0}^{n} g(x) f_n(x)\,dx$ est convergente

Or, $x \mapsto g(x) f_n(x)$ est définie et continue sur $[0;n]$ donc $\displaystyle\int_0^n g(x) f_n(x)\,dx$ n'est pas impropre.

Ainsi, $1 - \frac{X_n}{n}$ admet une espérance.

Copie anonyme - n°anonymat : 595398

Code épreuve : 238	Nombre de pages : 38	Session : 2025

Épreuve de : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES (EDHEC BS)

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$E\left(1-\frac{X_n}{n}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_n(x)\,dx$$ (f_n est nulle sur $]-\infty;0[\cup]n;+\infty[$)

$$= \int_0^n g(x) f_n(x)\,dx$$

$$= \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx$$

$$= -n \int_0^n -\frac{1}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx$$

$$= -n \times \left[\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+1}\right]_0^n$$

$$= -n\left(\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{n}{n}\right)^{n+1} - \frac{1}{n+1}\left(1-\frac{0}{n}\right)^{n+1}\right)$$

$$= \frac{n}{n+1}$$

$$= 1-\frac{1}{n+1}$$

- Posons $h : x \mapsto \left(1-\frac{x}{n}\right)^2$
Par théorème de transfert (licite car h est continue sur $[0;n]$),

$\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2$ admet une espérance si et seulement si, $\int_0^n h(x) f_n(x)\,dx$ converge

Or, $x \mapsto h(x)\, f_n(x)$ est définie et continue sur $[0;n]$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc l'intégrale $\int_0^n h(x) f_n(x)\,dx$ n'est pas impropre.

Ainsi, $\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2$ admet une espérance.

$$E\left(\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f_n(x)\,dx$$

$\Big\}$ f_n est nulle sur $]-\infty;0[\cup]n;+\infty[$

$$= \int_0^n h(x) f_n(x)\,dx$$

$$= \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+1} dx$$

$$= -n \int_0^n -\frac{1}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+1} dx$$

$$= -n \left[\frac{1}{n+2}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+2}\right]_0^n$$

$$= -n\left(\frac{1}{n+2}\left(1-\frac{n}{n}\right)^{n+2} - \frac{1}{n+2}\left(1-\frac{0}{n}\right)^{n+2}\right)$$

$$= \frac{n}{n+2}$$

$$= 1-\frac{2}{n+2}$$

Conclusion:

✓ $E\left(1-\frac{X_n}{n}\right) = 1-\frac{1}{n+1}$

✓ $E\left(\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2\right) = 1-\frac{2}{n+2}$

2b) • $1-\frac{X_n}{n}$ admet une espérance donc X_n admet une espérance (combinaison linéaire d'un variable aléatoire admettant une espérance).

$$\mathbb{E}\left(1-\frac{X_n}{n}\right) = 1 - \mathbb{E}(X_n) \times \frac{1}{n}$$ (linéarité de l'espérance)

On a donc,

$$1-\mathbb{E}(X_n)\times\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{n+1}$$

donc,

$$-\mathbb{E}(X_n)\times\frac{1}{n} = -\frac{1}{n+1}$$

d'où,

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{n}{n+1}$$

• $\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2 = 1-2\frac{X_n}{n}+\frac{X_n^2}{n^2}$ admet une espérance donc X_n^2 admet égalemt une espérance (combinaison linéaire d'une variable aléatoire acttant une espérance)

$$\mathbb{E}\left(\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2\right) = 1-\mathbb{E}(X_n)\times\frac{2}{n}+\mathbb{E}(X_n^2)\times\frac{1}{n^2}$$ (linéarité de l'esp)

On a donc,

$$1-\mathbb{E}(X_n)\times\frac{2}{n}+\mathbb{E}(X_n^2)\times\frac{1}{n^2} = 1-\frac{2}{n+2}$$

donc,

$$-\frac{2}{n+1}+\mathbb{E}(X_n^2)\times\frac{1}{n^2} = -\frac{2}{n+2}$$

d'où : $\mathbb{E}(X_n^2) = 0$

D'après la Formule de Koenig-Huyggens,

$$\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) - (\mathbb{E}(X_n))^2$$
$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

Conclusion :

- $\mathbb{E}(X_n) = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$
- $\mathbb{V}(X_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^2$

3. Considérons $X_n(\Omega) = [0;n]$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

* si $x < 0$:

$$F_n(x) = \mathbb{P}([X_n \leq x]) \quad \text{car } x<0 \text{ et } X_n(\Omega) = [0;n]$$
$$= \mathbb{P}(\emptyset)$$
$$= 0$$

* si $x > n$:

$$F_n(x) = \mathbb{P}([X_n \leq x]) \quad \text{car } x>n \text{ et } X_n(\Omega) = [0;n]$$
$$= \mathbb{P}(\Omega)$$
$$= 1$$

* si $x \in [0; n]$

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} f_n(x)\,dx + \int_0^x f_n(x)\,dx$$ } f_n est nulle sur $]-\infty;0[\cup]n;+\infty[$

$$= \int_0^x f_n(x)\,dx$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$

Conclusion :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0;n] \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

4.

4a) $\forall x<0 \quad \lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$

4b) Soit $x \geqslant 0$.

Puisque $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$, il existe un rang à partir duquel

$$F_n(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$

Un tel rang est $n = \lfloor x \rfloor + 1$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Conclusion :} \\ \forall x \geqslant 0 \quad \forall n \geqslant \lfloor x \rfloor + 1 \quad F_n(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\end{array}}$$

4c) Soit $x \geqslant 0$ et Soit n suffisament proche de $+\infty$.

* si $x = 0$:

On a, $n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) = n \ln(1) = 0$

donc : $\lim_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) = 0$

* <u>si $x>0$</u> :

On a : ✓ $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{x}{n} = 0$

✓ $\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x}{n}$

<u>d'où</u> : $\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln\left(1-\frac{x}{n}\right) = -x$

$$\boxed{\text{Conclusion : } \forall x \geqslant 0 \quad \lim_{n\to+\infty} n \ln\left(1-\frac{x}{n}\right) = -x}$$

4 d) Soit $x \in \mathbb{R}$.

* <u>si $x<0$</u> :

$\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$

* <u>si $x \geqslant 0$</u> :

Pour n suffisamment proche de $+\infty$ ($n \geqslant \lfloor x \rfloor + 1$),

$$\begin{aligned} F_n(x) &= 1 - \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \\ &= 1 - \exp\left(n \ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

Or, d'après q. 4c),

$\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln\left(1-\frac{x}{n}\right) = -x$

d'où : par composition de limites,

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 1 - e^{-x}$$

$$\boxed{\text{Conclusion: } \quad X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X \quad \text{où } X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)}$$

5)

5a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

5b) • Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z_n > x]) &= \mathbb{P}([n M_n > x]) \quad \} \; n > 0 \\ &= \mathbb{P}([\; M_n > \tfrac{x}{n}]) \\ &= \mathbb{P}([\min(U_1, \dots, U_n) > \tfrac{x}{n}]) \\ &= \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} [U_i > \tfrac{x}{n}]\Big) \quad \} \; U_1, \dots, U_n \text{ sont indép} \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}([U_i > \tfrac{x}{n}]) \\ &= \prod_{i=1}^{n} 1 - \mathbb{P}([U_i \leq \tfrac{x}{n}]) \\ &= \prod_{i=1}^{n} 1 - G(\tfrac{x}{n}) \\ &= \Big(1 - G(\tfrac{x}{n})\Big)^n \end{aligned}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 595398

Code épreuve : 238	Nombre de pages : 38	Session : 2025

Épreuve de : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES (EDHEC BS)

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

- Soit $x \in \mathbb{R}$

$$F_{Z_n}(x) = P([Z_n \leq x])$$

$$= 1 - P([Z_n > x])$$

d'après ce qui précède

$$= 1 - \left(1 - G\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{x}{n} < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq \frac{x}{n} \leq 1 \\ 1 & \text{si } \frac{x}{n} > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases}$$

<u>Conclusion :</u> ✓ $\forall x \in \mathbb{R} \quad P([Z_n > x]) = \left(1 - G\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n$

✓ $\forall x \in \mathbb{R} \quad F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases}$

5c) • $\forall x \in \mathbb{R} \quad F_{Z_n}(x) = F_n(x)$

Conclusion : X_n et Z_n ont la même fonction de répartition. Or, puisque la fonction de répartition caractérise la loi, X_n et Z_n ont même loi.

5d)

```
def simul_X(n) :
    U = [ Rd.Random() for i in range (1,n+1)]
    Return n * min(U)
```

Problème :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1)

```
def varX(n):
    k = rd.randint (1,n+2)
    if k == n+1 :
        X = 0
    elif k == 1 :
        X = 1
    else :
        X = 1
        while rd.randint (1,n+1) <= 1/j :
            X = X+1
    Return (X)
```

2)

✓ Expérience : L'expérience comporte $n+1$ issues numérotées de 1 à n, qui sont toutes équiprobables

Conclusion :

$\forall k \in [\![1;n+1]\!] \quad \mathbb{P}(U_k) = \frac{1}{n+1}$

3.

3a) Soit $k \in [\![1;n]\!]$ et soit $j \in \mathbb{N}^*$.

Supposons U_k réalisé.

$[X_n = j]$ est réalisé si et seulement si, la première boule blanche est tirée au j^e tirage dans l'urne k

si et seulement si, du 1^{er} au $j-1^e$ tirage dans l'urne k, seules des boules noires ont été tirées puis une blanche au j^e

$$\boxed{\text{Conclusion: } \forall k \in [\![1;n]\!] \quad \forall j \in \mathbb{N}^* \quad P_{U_k}([X_n = j]) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1} \frac{n-(k-1)}{n}}$$

3b)

```
else:
    X = ((k-1/ n ) **(j-1)) * n-(k-1)/ n
Return (X)
```

Copie anonyme - n°anonymat : 595398

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 38	Session : 2025

Épreuve de : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES (EDHEC BS)

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

4.

4a) Supposons U_{n+1} réalisé.

Dès lors, l'urne choisie est la $n+1^e$, qui ne contient que des boules noires.
On ne peut donc pas obtenir de boule blanche au 1^{er} tirage, puisqu'il n'y en a pas !

Conclusion :

$$\mathbb{P}_{U_{n+1}}([X_n = 1]) = 0$$

4b) Soit $k \in [\![1;n]\!]$.

D'après q. 3a),

$$\forall j \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}_{U_k}([X_n = j]) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1} \frac{n-(k-1)}{n}$$

Conclusion : $\forall k \in [\![1;n]\!] \quad \mathbb{P}_{U_k}([X_n=1]) = \frac{n-(k-1)}{n-(k-1)}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

4c) D'après la formule des probabilités totales avec $(U_k)_{k\in[\![1;n+1]\!]}$ comme système complet d'évènet :

$$\mathbb{P}([X_n=1]) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(U_k \cap [X_n=1])$$

licite car $P(U_k)\neq 0$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}_{U_k}([X_n=1]) \times \mathbb{P}(U_k)$$

$\mathbb{P}_{U_{n+1}}([X_n=1])=0$ (q.4a)

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n-(k-1)}{n} \times \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{n}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \left(\sum_{k=1}^{n} n - \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \right)$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \left(n^2 - \frac{n(n+1)}{2} + n \right)$$

$$= \frac{n}{n+1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\underline{\text{Conclusion}}: \quad \mathbb{P}([X_n=1]) = \frac{1}{2}}$$

5.

5a) Supposons U_{n+1} réalisé.

Dès lors l'urne $n+1$ est choisie et ne contient aucune boule blanche.

<u>Conclusion</u> :

$$\forall j \in [\![2 ; +\infty[\![\quad \mathbb{P}_{U_{n+1}}([X_n = j]) = 0$$

5b) $\forall k \in [\![1 ; n]\!] \quad \mathbb{P}_{U_k}([X_n = j]) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1} \frac{n-(k-1)}{n}$

(cf. q. 3a).

soit $j \geq 2$.

5c) D'après la formule des probabilités totales avec $(U_k)_{k \in [\![1 ; n+1]\!]}$ comme système complet d'événements :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_n = j]) &= \sum_{k=1}^{n+1} P(U_k \cap [X_n = j]) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} P_{U_k}([X_n = j]) \times P(U_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P_{U_k}([X_n = j]) \times P(U_k) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1} \frac{n-k+1}{n} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} \frac{n-k+2}{n}
\end{aligned}$$

licite car $P(U_k) \neq 0$

$P_{U_{n+1}}([X_n = j]) = 0$ q. 5a)

q. 5b

changement d'indice

. . . .

9.

9a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [\![p ; p+1]\!]$.

Dès lors,

$$p \leq t \leq p+1$$

donc par décroissance de $\frac{1}{\cdot}$,

$$\frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{p}$$

les fonctions manipulées sont intégrables et par croissance de l'intégrale,

$$\int_p^{p+1} \frac{1}{p+1}\,dt \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{p}\,dt$$

d'où,

$$\frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{p}$$

Conclusion : $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $\quad \frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{p}$

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 38 | Session : 2025

Épreuve de : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES (EDHEC BS)

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

9b). Soit $n \in [\![2;+\infty [\![$.

En sommant l'inégalité établie à q. 9a), pour p variant de 1 à $n-1$, on a,

$$\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p+1} \leq \sum_{p=1}^{n-1} \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$$

d'où, en effectuant un changement d'indice dans la somme de gauche, une relation de Chasles dans celle du milieu,

$$\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \leq \int_1^n \frac{1}{t}\,dt \leq \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$$

<u>Conclusion :</u> $\displaystyle\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \leq \ln(n) \leq \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

9c) Soit $n \in [\![2;+\infty [\![$,

- D'une part :

$$\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \leq \ln(n) \iff \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - 1 \leq \ln(n)$$
$$\iff \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leq \ln(n) + 1$$

- D'une autre part :

$$\ln(n) \leq \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} \iff \ln(n) \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$$
$$\iff \ln(n) + \frac{1}{n} \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$$

Conclusion : $\forall n \in [\![2;+\infty [\![\quad \ln(n) + \frac{1}{n} \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leq \ln(n)+1$

9c) $$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$$

(par encadrement et croissance comparée).

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751