Code sujet : 297

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : EDHEC BS

MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE GÉNÉRALE

Lundi 27 avril 2026 de 14h à 18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Il est demandé aux candidats d'indiquer clairement les numéros des questions traitées et de mettre leurs résultats en valeur.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies numpy et numpy.random de Python sont importées avec les commandes respectives import numpy as np, et import numpy.random as rd.

Exercice 1

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes, telles que $X_1(\Omega)=X_2(\Omega)=]0,1]$ et suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $Y_1=\ln(X_1)$, $Y_2=\ln(X_2)$, $Z=X_1X_2$ et on admet que Y_1, Y_2 et Z sont des variables aléatoires à densité définies sur le même espace probabilisé que X_1 et X_2.

1) Écrire en `Python` une fonction `simulZ` permettant de simuler Z.

2) Justifier l'existence de l'espérance et de la variance de Z puis les déterminer.

3) On note F la fonction de répartition commune à Y_1 et Y_2.
   a) Déterminer $F(x)$ pour tout réel x.
   b) En déduire une densité f commune à Y_1 et Y_2.

Tournez la page SVP

4) a) Vérifier que la fonction h, définie par $h(x)=\begin{cases}-x\mathrm{e}^{x} & \text{si } x\leq 0\\ 0 & \text{si } x>0\end{cases}$, est une densité de Y_1+Y_2.

b) En déduire la fonction de répartition H de Y_1+Y_2.

c) Déterminer la fonction de répartition F_Z de Z puis vérifier qu'une densité f_Z de Z est donnée par :

$$f_Z(x)=\begin{cases}-\ln(x) & \text{si } 0<x\leq 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

5) a) Pour tout entier naturel n, montrer que l'intégrale $\int_0^1 x^n \ln(x)\mathrm{d}x$ converge et donner sa valeur.

b) Retrouver alors les valeurs de $E(Z)$ et $V(Z)$ déterminées à la question 2).

Exercice 2

Dans cet exercice, on pourra utiliser sans démonstration les formules $\cos(2a)=2\cos^2(a)-1$ et $\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$.

On rappelle le développement limité à l'ordre 5 de la fonction sinus au voisinage de 0 donné par :

$$\sin(x)\underset{0}{=}x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$$

1) Montrer que l'on définit parfaitement deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant $u_1=0$, $v_1=2$ et, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1}=\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \text{ et } v_{n+1}=\frac{v_n}{u_{n+1}}$$

2) Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie v_n.

```
def suite_v(n):
    u=0
    v=2
    for k in range(2,n+1):
        ⋮
    return v
```

3) a) Montrer qu'il existe une unique suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont les éléments appartiennent à $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\cos(\alpha_n)$$

b) Expliciter α_n en fonction de n, pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

c) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $v_n=2^n\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ puis donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

4) Déterminer les constantes réelles a, b et c telles que :

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} a+\frac{b}{4^n}+\frac{c}{4^{2n}}+o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$$

5) Accélération de convergence par la méthode de Richardson.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $w_n = \dfrac{4v_{n+1} - v_n}{3}$.

a) Écrire en `Python` une fonction `suite_w` utilisant la fonction `suite_v` et qui renvoie w_n.

b) Donner la limite de w_n.

c) Montrer que $w_n \underset{n\to+\infty}{=} \pi - \dfrac{\pi^5}{480\times 4^{2n}} + o\left(\dfrac{1}{4^{2n}}\right)$, puis déterminer un équivalent de $\dfrac{w_n - \pi}{v_n - \pi}$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

d) Dans le cadre de la recherche d'une valeur approchée de π, quel intérêt y a-t-il à utiliser la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ plutôt que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

6) Généralisation de la méthode de Richardson.

Étant donnés deux réels q et r de $]0,1[$ tels que $q > r$, on considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*,\ x_n \underset{n\to+\infty}{=} a + bq^n + cr^n + o(r^n)$$

a) Définir une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont le terme général est combinaison linéaire de x_n et x_{n+1}, qui vérifie $y_n \underset{n\to+\infty}{=} a + dr^n + o(r^n)$, où d est une constante à déterminer en fonction de c, q et r.

b) Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} a + bq^n + o(q^n)$.

c) En déduire que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers a plus rapidement que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 3

On suppose que toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Partie 1

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0.
Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point O.
Le mobile se déplace selon la règle suivante : à chaque instant k ($k \in \mathbb{N}^*$), il se place de façon équiprobable sur l'un des points d'abscisses 0, 1, …, k.
Pour tout entier naturel k, on note X_k la variable aléatoire égale à l'abscisse de ce point à l'instant k (on a donc $X_0 = 0$).
On admet que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1) a) Déterminer, pour tout entier naturel k non nul, la loi de X_k.

b) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, X_k possède une espérance et une variance, puis calculer $E(X_k)$ et $V(X_k)$.

2) On note Y la variable aléatoire égale au rang du premier retour à l'origine du mobile (sans prendre en compte son positionnement au départ) et on pose $Y = 0$ s'il n'y a aucun retour à l'origine.

a) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer l'événement $(Y = n)$ à l'aide des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

b) En déduire que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Y = n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

c) Déterminer par le calcul la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y = n)$. En déduire $P(Y = 0)$.

d) La variable Y admet-elle une espérance ?

Tournez la page SVP

Partie 2

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et on considère une variable aléatoire U_n telle que $U_n(\Omega)=[\![0,n-1]\!]$ et qui suit la loi uniforme sur $[\![0,n-1]\!]$.

Pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, on considère également une variable aléatoire Z_n dont la loi, conditionnellement à l'événement $(U_n=k)$, est la loi géométrique de paramètre $1-\frac{k}{n}$.

3) Simulation informatique de Z_n.

Compléter la fonction suivante afin qu'elle simule U_n et Z_n et renvoie la valeur prise par Z_n.

```
def var_Z(n):
    U=------
    Z=------
    return Z
```

4) a) Montrer que, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, on a l'égalité :

$$P(Z_n=i)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{i-1}-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{i}$$

b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}P(Z_n=i)$.

c) Conclure quant à la convergence en loi de la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

5) Espérance de Z_n.

Justifier que l'on peut utiliser la formule de l'espérance totale puis établir que l'espérance de Z_n est donnée par :

$$E(Z_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

6) Équivalent de $E(Z_n)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

a) Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{k+1}\leq\ln(k+1)-\ln(k)\leq\frac{1}{k}$$

b) Établir, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'encadrement :

$$\ln(n)+\frac{1}{n}\leq E(Z_n)\leq\ln(n)+1$$

c) En déduire un équivalent de $E(Z_n)$.

Problème

On désigne par n un entier naturel non nul et on note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques et on dit qu'une matrice M de $S_n(\mathbb{R})$ est *positive* lorsque l'on a :

$$\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXMX\geq 0$$

On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives.

Partie 1 : caractérisation des matrices symétriques positives

On désigne par A une matrice de $S_n(\mathbb{R})$ et on se propose de montrer que A est élément de $S_n^+(\mathbb{R})$ si, et seulement si, ses valeurs propres sont positives.

1) On suppose que A est positive et on considère une valeur propre λ de A.

a) Montrer qu'il existe un vecteur X non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda = \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX}$.

b) En déduire que $\lambda \geq 0$.

2) a) Justifier l'existence d'une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et d'une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PD\,{}^tP$.

On pose $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et on suppose que les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont tous positifs, non nécessairement distincts.

b) Pour tout vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $Y = {}^tPX$. Montrer que ${}^tXAX = {}^tYDY$.

c) En déduire que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geq 0$.

3) Conclure quant à l'objectif annoncé.

Partie 2 : « racine carrée » d'une matrice symétrique positive

Dans cette partie, A désigne une matrice de $S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = PD\,{}^tP$, les matrices P et D étant celles présentées dans la partie 1.

4) a) Justifier que la matrice $\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \sqrt{\lambda_2} & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$, élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est correctement définie.

b) Vérifier que la matrice $B = P\Delta\,{}^tP$ est élément de $S_n^+(\mathbb{R})$ et vérifie $B^2 = A$.

5) On note $\mu_1, \ldots, \mu_p$ les valeurs propres distinctes de A (avec $1 \leq p \leq n$) ce qui fait que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont éléments de $\{\mu_1, \ldots, \mu_p\}$.

Pour tout i de $[\![1,p]\!]$, on pose : $\forall x \in \mathbb{R}$, $L_i(x) = \displaystyle\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} \frac{x - \mu_k}{\mu_i - \mu_k}$.

Pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, justifier que l'on a :

$$L_i(\mu_i) = 1 \text{ et } L_i(\mu_j) = 0 \text{ si } i \neq j$$

6) On note S le polynôme défini par $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \sqrt{\mu_i}\, L_i$.

a) Montrer que $S(\mu_k) = \sqrt{\mu_k}$ pour tout k de $[\![1,p]\!]$ et en déduire $S(\lambda_i)$, pour tout i de $[\![1,n]\!]$.

b) Établir, pour tout entier naturel k, la relation $A^k = PD^k\,{}^tP$.

c) En déduire que $S(A) = P\,S(D)\,{}^tP$ puis établir finalement que $B = S(A)$.

Tournez la page SVP

Partie 3 : unicité de la « racine carrée » d'une matrice symétrique positive

Dans cette partie, A désigne toujours une matrice de $S_n^+(\mathbb{R})$.

On se propose de montrer que la matrice B trouvée dans la partie précédente est la seule matrice symétrique positive à vérifier $B^2 = A$. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe une autre matrice C de $S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = A$.

7) a) Montrer que C et A commutent (c'est-à-dire que $AC = CA$).

b) En déduire que, pour tout entier naturel k, on a $A^k C = CA^k$ puis utiliser la question 6c) pour en déduire que B et C commutent.

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique pour laquelle on note $\langle u, v\rangle$ le produit scalaire des vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$.

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$, b l'endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B et c l'endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à C.

On note toujours $\mu_1, \ldots, \mu_p$ $(p \le n)$ les valeurs propres distinctes de A, et pour tout i de $[\![1, p]\!]$, on pose $E_i = \operatorname{Ker}\left(b - \sqrt{\mu_i}\, Id\right)$.

8) a) Justifier rapidement que $b \circ c = c \circ b$.

b) Montrer que E_i est stable par c (c'est-à-dire que, si $x \in E_i$, alors $c(x) \in E_i$).

c) On note alors c_i l'endomorphisme induit par c sur E_i, défini par :

$$c_i : \begin{array}{l} E_i \to E_i \\ x \mapsto c_i(x) = c(x) \end{array}$$

Justifier que c_i est symétrique.

d) En déduire qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}_i$ de E_i formée de vecteurs propres, à la fois de c_i et de b.

e) Expliquer comment construire une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle les matrices de b et c sont diagonales.

f) Montrer alors que $C = B$.

Grâce à l'unicité, on note maintenant $B = A^{1/2}$ et B est appelée la « racine carrée » de A.

Partie 4 : un résultat sur l'inversibilité et la positivité

On dit qu'une matrice M de $S_n(\mathbb{R})$ est *définie positive* lorsque l'on a :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \left\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\right\},\ {}^tX M X > 0$$

9) En s'inspirant des questions 1) et 2), mais sans refaire les calculs déjà faits, montrer qu'une matrice A de $S_n(\mathbb{R})$ est définie positive si, et seulement si, ses valeurs propres sont strictement positives.

10) Soit M une matrice de $S_n(\mathbb{R})$. On note $\operatorname{Sp}(M)$ l'ensemble des valeurs propres de M.

On pose $N = M - I_n$.

a) Montrer que N est symétrique.

On suppose dans la suite de cette question que N est positive.

b) Montrer que $\operatorname{Sp}(M) \subset [1, +\infty[$ et en déduire que M est inversible.

Établir que $I_n - M^{-1}$ est positive.

11) Soit S_1 et S_2 deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, avec S_1 définie positive.

On admet sans démonstration que $S_2 - S_1$ est symétrique et on suppose que $S_2 - S_1$ est positive.

a) Montrer que S_2 est définie positive.

b) Justifier que $S_1^{1/2}$ est inversible puis développer et simplifier le produit $S_1^{-1/2}(S_2 - S_1)S_1^{-1/2}$, où $S_1^{-1/2}$ désigne l'inverse de $S_1^{1/2}$.

c) On pose $L = S_1^{-1/2}\, S_2\, S_1^{-1/2}$.

Vérifier que L est symétrique et que $L - I_n$ est symétrique, puis montrer, en considérant, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le réel ${}^tX(L - I_n)X$, que $L - I_n$ est positive.

d) Justifier que L est inversible et que $I_n - L^{-1}$ est positive.

e) Établir finalement que $S_1^{1/2}\left(S_1^{-1} - S_2^{-1}\right)S_1^{1/2}$ est positive et conclure que $S_1^{-1} - S_2^{-1}$ est positive.

FIN