BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 294

Conception : BSB Burgundy School of Business

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHÉMATIQUES

Mardi 4 mai 2021, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Une matrice carrée M est dite *idempotente* si elle vérifie $M^2 = M$.

1. **Exemple.**

   Vérifier que la matrice $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est idempotente. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie.

2. **Quelques propriétés.**

   Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et M une matrice carrée d'ordre n idempotente.

   a) Vérifier que $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de M.

   b) Quelles sont les seules valeurs propres possibles de M ?

   c) On pose $N = I_n - M$ où I_n désigne la matrice identité d'ordre n. Montrer que N est idempotente.

3. **Application à l'étude des puissances d'une matrice.**

   On considère les matrices $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = I_2 - C$.

   a) Montrer que C et D sont idempotentes. Calculer CD et DC.

b) On pose $B = 2C + D$.

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $B^n = 2^n C + D$.

Calculer, pour tout entier naturel n, les quatre coefficients de B^n.

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Calculer P^2. En déduire que P est inversible et donner P^{-1}.

d) Calculer $P^{-1}AP$ et vérifier que : $P^{-1}AP = B$.

e) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $A^n = PB^nP^{-1}$.

f) Déduire de la question précédente et de 3.b), en détaillant les calculs, que pour tout entier naturel n on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 \times 2^n - 2 & -2^n + 1 \\ 6(2^n - 1) & -2^{n+1} + 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

1. Justifier que pour tout réel x on a : $x^2 + x + 1 > 0$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

2. Rappeler la valeur de $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x)$. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

3. Vérifier que $f(-\frac{1}{2}) = \ln(3) - 2\ln(2)$.

4. a) Justifier que pour tout réel x on a : $f'(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$.

   b) Dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$ en y faisant figurer les éléments obtenus aux questions 2 et 3.

5. a) Montrer, en la résolvant, que l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue x admet exactement deux solutions : -1 et 0.

   b) Justifier que la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x$.

   Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1.

6. a) Calculer la dérivée seconde de f et vérifier que pour tout réel x on a : $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$.

   b) Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$. Vérifier que $\mathcal{C}$ admet exactement deux points d'inflexions aux points d'abscisses $\dfrac{-1 + \sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{-1 - \sqrt{3}}{2}$.

7. a) Justifier, sans la résoudre, que l'équation $f(x) = 1$ admet exactement une solution α dans $[0, +\infty[$.

   b) On donne $\ln(3) \simeq 1,1$. Vérifier que $\alpha \in [0, 1]$.

   c) Vérifier que $f(-1 - \alpha) = 1$.

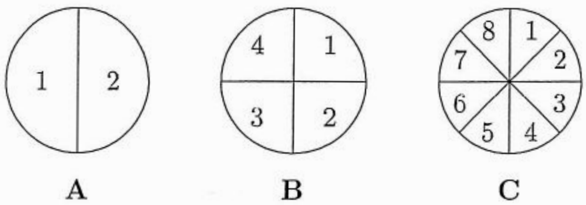
   d) Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il permette de calculer une valeur approchée de α à 10^{-3} près par dichotomie.

```
function y=f(x)
    y=...
endfunction
a=0, b=...
while b-a>10∧(-3)
    c=...
    if f(c)<1 then a=...
              else b=...
    end
end
disp(...)
```

8. On donne les valeurs suivantes : $\alpha \simeq 0,9$; $f(-\frac{1}{2}) \simeq -0,3$; $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \simeq 0,4$ et $\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \simeq -1,4$.
Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ ainsi que les tangentes obtenues en 5.b).

Exercice 3

Un forain organise un jeu de fléchettes dans une fête foraine. Le jeu se présente sous la forme de trois cibles A, B et C. La cible A est séparée en deux secteurs, la cible B est séparée en quatre secteurs et la cible C est séparée en 8 secteurs. Sur chaque cible, les secteurs sont de même dimension ce qui signifie qu'un joueur qui lance une fléchette au hasard sur une cible donnée a les mêmes chances d'atteindre chaque secteur de cette cible.



Le jeu consiste à lancer des fléchettes sur les cibles successives selon le protocole suivant :

- On commence par la cible A. Il faut atteindre le secteur 1 de cette cible pour avoir le droit de passer à la cible B ; dans le cas contraire on continue à lancer la fléchette en direction de la cible A.
- De même, lorsqu'on lance une fléchette en direction de la cible B, il faut atteindre le secteur 1 pour avoir le droit de passer à la cible C ; dans le cas contraire, on continue les lancers vers la cible B.
- Enfin le joueur ne lance qu'une fois la fléchette en direction de la cible C. Le secteur qu'il atteint décide du lot qu'il gagne.

On suppose que le joueur atteint toujours la cible visée et que pour une cible donnée les secteurs atteints le sont de manière équiprobable. On suppose que le joueur continue de lancer des fléchettes autant de fois qu'il est nécessaire pour avoir le droit de passer à la cible C.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note A_n l'événement : « lors du lancer de la n-ème fléchette le joueur tire vers la cible A ». On définit de même l'événement B_n. On note enfin a_n et b_n les probabilités respectives de A_n et B_n.

Le joueur commençant par la cible A on a donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.

1. a) Calculer les probabilités a_2 et b_2.
   b) Calculer b_3 et vérifier que $b_3 = \frac{5}{8}$.

Tournez la page S.V.P.

2. En utilisant la formule des probabilités totales, justifier que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a :

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{2}a_n$$

3. a) Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche les valeurs de a_n et de b_n, l'entier $n \geq 1$ étant donné par l'utilisateur.

```
1.  n=input('n ?')
2.  a=1, b=0
3.  for i=2:n
4.      b=...
5.      a=...
6.  end
7.  disp(b,a)
```

   b) Si on échange les lignes 4. et 5. le résultat affiché est-il le même ? Pourquoi ?

4. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

5. Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose : $v_n = 2^{n-1}b_n + 2$.

   a) Montrer que $v_1 = 2$ et que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a : $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n$.

   b) En déduire une expression de v_n en fonction de n pour tout entier naturel $n \geq 1$.

   c) Établir que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a : $b_n = 2 \times \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} - \frac{2}{2^{n-1}}$.

6. On rappelle que si n est un entier naturel non nul, `grand(1,1,'uin',1,n)` permet de simuler la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

   Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fléchettes lancées par le joueur. Recopier le programme suivant et compléter les lignes 11 et 12 afin qu'il simule notre expérience et affiche la valeur de X.

```
1.  cible="a"
2.  n=1
3.  while cible<>"c"
4.      n=n+1
5.      if cible=="a" then
6.         secteur=grand(1,1,'uin',1,2)
7.         if secteur==1 then cible="b"
8.         end
9.      else
10.        if cible=="b" then
11.            secteur=...
12.            if ...  then ...
13.            end
13.        end
13.     end
14.  end
15.  disp(n)
```

7. Il faut payer 1 euro pour chaque fléchette lancée. Les joueurs se découragent vite. Le forain constate qu'en fait, chaque joueur effectue au moins deux lancers et s'il n'obtient pas le droit de tirer sur la cible C après les deux premiers lancers, alors il abandonne le jeu. Les deux euros qu'il a donnés sont alors perdus.

a) Justifier que la probabilité pour un joueur donné de gagner un lot dans ces conditions est $\frac{1}{8}$.

20 joueurs se présentent successivement et jouent selon ce principe. On suppose que les résultats de chaque joueur sont indépendants les uns des autres. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de joueurs qui gagnent un lot.

b) Reconnaître la loi de Y. Décrire l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y et donner l'expression de $P(Y = k)$ pour tout entier k appartenant à cet ensemble.

c) Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

d) Chaque lot offert par le forain est d'une valeur de 5 euros. Une fois que les 20 joueurs ont tenté leur chance, on note G la variable aléatoire égale au gain en euros du forain, G étant négatif si le forain perd de l'argent.

Justifier que $G = 2(20 - Y) - 2Y$. Calculer le gain moyen du forain.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = 0 \text{ si } t < 0 \text{ et } f(t) = e^{-t/2} - e^{-t} \text{ si } t \geq 0$$

1. a) Montrer que f est positive sur $\mathbb{R}$.

   b) Établir que f est continue sur $\mathbb{R}$.

   c) Soit a un réel strictement positif. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at}dt$ converge et que $\int_0^{+\infty} e^{-at}dt = \frac{1}{a}$.

   d) Déduire des questions précédentes que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire ayant f pour densité.

2. Soit F la fonction de répartition de X.

   a) Calculer $F(x)$ pour tout réel $x < 0$.

   b) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$ on a : $F(x) = 1 - 2e^{-x/2} + e^{-x}$.

3. a) Soit Y une variable aléatoire à densité suivant une loi exponentielle de paramètre $a \in]0, +\infty[$.

   Donner une densité de Y. Rappeler l'espérance de Y.

   b) En déduire que $\int_0^{+\infty} te^{-at}dt$ converge et que $\int_0^{+\infty} te^{-at}dt = \frac{1}{a^2}$.

   c) Montrer que X admet une espérance et que $E(X) = 3$.