Copie anonyme - n°anonymat : 240871

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 18	Session : 2025

Épreuve de : Maths appro emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème 1

Partie 1 :

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f : t \mapsto (1-t^2)^n \in C^0(\mathbb{R})$ donc I_n et J_n sont bien définies.

De plus $f(-t) = (1-(-t)^2)^n = (1-t^2)^n = f(t)$. f est paire

Dès lors $J_n = 2\int_0^1 (1-t^2)^n dt = 2I_n$

2) $I_0 = \int_0^1 (1-t^2)^0 dt = \int_0^1 1 dt = 1$.

3) $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} dt - \int_0^1 (1-t^2)^n dt$

$= \int_0^1 (1-t^2)^n (1-t-1) dt$ par linéarité de l'intégrale.

Or $-t \leq 0$ si $t \in [0,1]$ et $(1-t^2)^n \geq 0$ car $t^2 \leq 1$

Donc sur $[0,1]$, $(1-t^2)^n(-t) \leq 0$. Donc par positivité de l'intégrale, $I_{n+1} - I_n \leq 0$.

Donc (I_n) est décroissante

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

~~4) Posons~~ $\cancel{u(t) = (1-t^2)^n}$ ~~et~~ $\cancel{v(t)=t}$ ~~avec~~ $\cancel{(v,u)\in C^1([0,1])^2}$

~~Réalisons une intégration par parties :~~

$$\cancel{I_n = \left[(1-t^2)^n t\right]_0^1 - \int_0^1 n(-2t)(1-t^2)^{n-1}\, t\,dt}$$

$$\cancel{= 2n\int_0^1 t^2(1-t^2)^{n-1}\,dt}$$

5) Raisonnons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$. Soit P_n : " $I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$ "

• P_0 : $I_0 = 1 = \frac{(2^0 0!)^2}{(2\cdot 0+1)!}$ P_0 est vraie

• On suppose P_n vraie pour un $n\in\mathbb{N}$ fixé, montrons que P_{n+1} est vraie :

$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} I_n \text{ par 4)}$$

$$= \frac{2(n+1)}{2n+3}\cdot\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \text{ par hypothèse de récurrence}$$

$$= \frac{2^{n+1}(n+1)!\cdot 2^n n!\cdot(2n+2)}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!}$$

$$= \frac{2^{n+1}(n+1)!\, 2^n n!\, 2(n+1)}{(2n+3)!}$$

$$= \frac{\left(2^{n+1}(n+1)!\right)^2}{(2(n+1)+1)!}$$

P_{n+1} est vraie.

$\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie

Donc $J_n = 2I_n = \dfrac{2^{2n+1} n!^2}{(2n+1)!}$

6)
```
def I(n) :
    i = 1                                  # définition de I0
    for K range(1, n+1) :
        i = (2*K)/(2*K+1) * i              # formule de 4)
    return i
```

7) $J_n = \dfrac{2^{2n+1} n!^2}{(2n+1)!} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2^{2n+1} \cdot \left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2}{\sqrt{2\pi(2n+1)}\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}}$ par la formule de Stirling

$\underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2^{2n+1} \cdot 2\pi n \frac{n^{2n}}{e^{2n}}}{\sqrt{2\pi(2n+1)} \frac{(2n+1)^{2n+1}}{e^{2n+1}}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2^{2n+2} \pi n \frac{n^{2n}}{e^{2n}}}{\sqrt{4\pi n} \frac{(2n)^{2n+1}}{e^{2n+1}}}$ car $2n+1 \underset{+\infty}{\sim} 2n$

$\underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2^{2n+1}\sqrt{\pi n}\, n^{2n}}{e^{2n}} \cdot \dfrac{e^{2n+1}}{2^{2n+1} \cdot n^{2n+1}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi n}\, e}{n} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{n}}\, e$

Cela est proche du résultat demandé à une constante près.

Partie 2 :

8) Soit $(P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$. $PQ \in C^0(\mathbb{R})$ comme produit de polynômes donc $\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$ existe

$\langle \cdot,\cdot \rangle$ est une forme.

$\forall t \in [-1,1]$, $P(t)Q(t) = Q(t)P(t)$ par commutativité du produit usuel.

En intégrant, on a que $<\cdot,\cdot>$ est symétrique

Soit $\lambda \in \mathbb{R}, (P,Q,R) \in (\mathbb{R}[X])$:

$<\lambda P+Q, R> = \int_{-1}^{1} (\lambda P+Q)(t) R(t) dt = \lambda \int_{-1}^{1} P(t) R(t) dt + \int_{-1}^{1} P(t) R(t) dt$

par définition de la somme de polynômes, distributivité et linéarité de l'intégrale

$= \lambda <P,R> + <Q,R>$ $\quad$ $<\cdot,\cdot>$ est linéaire à gauche et symétrique donc bilinéaire

$<P,P> = \int_{-1}^{1} P^2(t) dt \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale avec bornes dans le bon sens car $P^2(t) \geqslant 0$ sur $[-1,1]$

$<P,P> = 0 \iff \int_{-1}^{1} P^2(t) dt = 0 \iff \forall t \in [-1,1], P^2(t) = 0$ par stricte positivité de l'intégrale avec bornes dans le bon sens

$\iff \forall t \in [-1,1], P(t) = 0$

$\iff P = 0$ car P est un polynôme admettant une infinité de racines

$<\cdot,\cdot>$ est définie positive.

Par caractérisation, <u>$<\cdot,\cdot>$ est un produit scalaire.</u>

9) $<e_0, e_2> = <X^0, X^2> = \int_{-1}^{1} x^2 dx = 2\int_0^1 x^2 dx$ par parité de x^2

$= 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$

$= \frac{2}{3}$

$\neq 0$

<u>Pour $n \geqslant 2$, les polynômes de B_n ne sont pas orthogonaux pour ce produit scalaire</u>

Copie anonyme - n°anonymat : 240871

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 18 | Session : 2025

Épreuve de : Maths appro emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

10) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$u(\lambda P+Q)(x) = \left((1-x^2)(\lambda P+Q)'(x)\right)'$

$= \left((1-x^2)(\lambda P'(x)+Q'(x))\right)'$ par définition de la somme de polynômes et linéarité de la dérivation

$= \lambda\left((1-x^2)P'(x)\right)' + \left((1-x^2)Q'(x)\right)'$ par distributivité et linéarité de la dérivation

$= \lambda u(P)(x) + u(Q)(x)$

Donc u est une application linéaire.

$u(P)$ est un polynôme comme produit et dérivée de polynômes.

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $d°(P) \leq n$ où $d°$ est le degré du polynôme,

$d°(P') \leq n-1$ et $d°((1-x^2)P') \leq n+1$ par produit car $d°(1-x^2)=2$

Donc par dérivation, $d°(u(P)) \leq n$.

$u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

11) a. $\forall x \in \mathbb{R}$ $u(e_0)(x) = 0$ car $e_0' = X^{0\prime} = 0$ puis par produit et dérivation un polynôme car X^0 est constant.

$U(e_1)(x) = ((1-x^2)\cdot 1)' = -2x$ par dérivation car $e_1 = X$ donc $e_1' = 1$.

$u(e_1) = -2e_1$.

b : Soit $k \in [\![2, n]\!]$,

~~$u(e_k)(x) = ((1-x^2)x^{k'})'$~~

$u(e_k) = ((1-X^2)(X^k)')' = k((1-X^2)X^{k-1})'$
$= k(X^{k-1} - X^{k+1})'$
$= k(k-1)X^{k-2} - k(k+1)X^k$

Donc $u(e_k) = -k(k+1)e_k + k(k-1)e_{k-2}$

c : Par 11)a : $0 \in Sp(u)$ car $u(e_0) = 0 \cdot e_0$ avec $e_0 \neq 0$
$-2 \in Sp(u)$ car $u(e_1) = -2e_1$ avec $e_1 \neq 0$

13) Soit $m > n$, $f \in \mathbb{R}_m[X]$ fixé. $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous espace vectoriel de $(\mathbb{R}_m[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espace euclidien muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ car $n < m$

D'après le théorème de minimisation de la norme par projection orthogonale, $\exists! T_n \in \mathbb{R}_n[X]$

$\min_{g \in \mathbb{R}_n[X]} \|f-g\| = \|f - T_n\|$ avec $T_n = p_{\mathbb{R}_n[X]}(f)$ le projeté orthogonal de f sur $\mathbb{R}_n[X]$

$(L_0, L_1 \ldots L_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$, donc

$\exists! (c_0 \ldots c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, T_n = \sum_{k=0}^{n} c_k L_k =$

$$\mathbb{R}_m[X] = \mathbb{R}_n[X] \oplus \mathbb{R}_n[X]^{\perp}$$

On a :

Donc $\forall f \in \mathbb{R}_m[X]$, $f = p_{\mathbb{R}_n[X]}(f) + p_{\mathbb{R}_n^{\perp}[X]}(f)$ et $f = \sum_{k=0}^{m} \langle f, \frac{L_k}{\|L_k\|} \rangle \frac{L_k}{\|L_k\|}$

~~Donc pour notre f fixé,~~ $\cancel{T_n = f - p_{\mathbb{R}_n^{\perp}[X]}(f)}$. ↳ d'après l'expression des coordonnées dans une base orthonormée

$\left(\frac{L_0}{\|L_0\|}, \frac{L_1}{\|L_1\|} \ldots \frac{L_k}{\|L_k\|}\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$

Ainsi $T_n = \sum_{k=0}^{n} \langle f, \frac{L_k}{\|L_k\|} \rangle \frac{L_k}{\|L_k\|}$ d'après l'expression du projecteur orthogonal dans une base orthonormée.

Par l'unicité de l'écriture des coordonnées dans une base, on a $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $c_k = \frac{\langle f, L_k \rangle}{\|L_k\|^2}$

6 : $\|f\|^2 = \|f - T_n + T_n\|^2 = \|f - T_n\|^2 + \|T_n\|^2$ car $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $f - T_n \in \mathbb{R}_n^{\perp}[X]$, puis par le théorème de Pythagore.

Donc $\|f - T_n\|^2 = \|f\|^2 - \|T_n\|^2$

$= \|f\|^2 - \sqrt{\sum_{k=0}^{n} \langle f, \frac{L_k}{\|L_k\|} \rangle^2}^{\,2}$ d'après l'expression de la norme dans une base orthonormée

$= \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, L_k \rangle^2}{\|L_k\|^2}$

$= \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 \|L_k\|^2$

14) a : P_k est un polynôme de degré $2k$ par produits de k polynômes de degré 2.

Donc $Q_k = P_k^{(k)}$ est un polynôme de degré $2k - k = k$.

~~D'après la formule de Leibniz,~~ $\cancel{Q_k = P_k^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}}$

On admet que son coefficient dominant est $\frac{(2k)!}{k!}$

b: Q_0 est un polynome constant de premier terme $\frac{(2\cdot 0)!}{0!}=1$

$\underline{Q_0=1}$

$Q_1=(X^2-1)'=2X$

$Q_2=((X^2-1)^2)^{(2)}=(X^4-2X^2+1)^{(2)}=(4X^3-4X)'=\underline{12X^2-4}$

c)(i) $\forall x\in\mathbb{R},\ P_1(x)P_k'(x)=(x^2-1)\cdot k\cdot 2x(x^2-1)^{k-1}$
$=\underline{2k e_1(x)P_k(x)}$

(ii) Soit $k\in[\![0,n]\!]$ fixé : $P_1(x)P_k'(x)\in C^{k+1}(\mathbb{R})$ comme produit de polynomes

Appliquons la formule de Leibniz à l'ordre $k+1$ dans cette égalité :

$$\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}P_1(x)^{(i)}P_k'(x)^{(k+1-i)}=2k\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}e_1(x)^{(i)}P_k(x)^{(k+1-i)}$$

ie $\binom{k+1}{0}P_1(x)(P_k'(x))^{(k+1)}+\binom{k+1}{1}P_1'(x)P_k'^{(k)}(x)+\binom{k+1}{2}P_1^{(2)}(x)P_k'^{(k-1)}(x)=$

$2k\left(e_1(x)P_k^{(k+1)}(x)+\binom{k+1}{1}e_1'(x)P_k^{(k)}(x)\right)$

car P_1 est de degré 2 et e_1 de degré 1. Donc $P_1^{(i)}(x)=0$ pour $i>2$ et $e_1^{(j)}(x)=0$ pour $j>1$.

ie $1\cdot(x^2-1)P_k^{(k+2)}(x)+(k+1)2x P_k^{(k+1)}(x)+\frac{(k+1)(k)}{2}\cdot 2P_k^{(k)}(x)$

$=2kx P_k^{(k+1)}(x)+2k(k+1)P_k^{(k)}(x)$

ie $(x^2-1)Q_k''(x)+2x(k+1)Q_k'(x)+k(k+1)Q_k(x)=$
$2kx Q_k'(x)+2k(k+1)Q_k(x)$

ie $(x^2-1)Q_k''(x) + 2xQ_k'(x) - k(k+1)Q_k(x) = 0$

ie $(1-x^2)Q_k''(x) - 2xQ_k'(x) + k(k+1)Q_k(x) = 0$

Cette égalité équivaut à : $(1-x^2)Q_k''(x) - 2xQ_k'(x) = -k(k+1)Q_k(x)$
ie $u(Q_k)(x) = -k(k+1)Q_k(x)$

car $\forall x \in \mathbb{R}$ $u(P)(x) = ((1-x^2)P'(x))' = -2xP'(x) + (1-x^2)P''(x)$

Donc comme $Q_k \neq 0$, Q_k est vecteur propre de u associé à $-k(k+1)$

(iii) Ainsi $(Q_0 \_ Q_n)$ est une famille libre de vecteurs propres de $\mathbb{R}_n$ de u.

En montrant qu'elle est orthogonale, on retrouve la base demandée à la question 12 puis voyant que le coefficient du terme du plus haut degré de L_i est 1, on a que $\underset{\forall k \in [0,n]}{L_k} = \frac{k}{(2k)!} Q_k$ car le coefficient de plus haut degré est $\frac{(2k)!}{k!}$

e)(i) $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_k^{(2k)}(x) = Q_k^{(k)}(x)$. Or $Q_k(x)$ est de degré k, donc $Q_k^{(k)}$ est constant égal à son terme de plus haut degré, multiplié par $k!$ car on a dérivé k fois.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_k^{(2k)}(x) = (2k)!$

(ii) Raisonnons par récurrence sur $\ell \in [\![0, k]\!]$, soit F_ℓ :

" $\exists ! R_{k\ell} \in \mathbb{R}_\ell[X], \forall x \in \mathbb{R}, P_k^{(\ell)}(x) = (x^2-1)^{k-\ell} R_{k\ell}(x)$ ".

F_0 est vraie car $\forall x \in \mathbb{R}, P_k^{(0)}(x) = (x^2-1)^{k-0} \cdot R_{k0}(x)$ où $R_{k0}(x) = 1$.

Supposons F_ℓ vraie pour un $\ell \in [\![0, k]\!]$ fixe, montrons que $F_{\ell+1}$ est vraie :

Par hypothèse de récurrence, $\forall x \in \mathbb{R}, P_k^{(\ell)} = (x^2-1)^{k-\ell} R_{k\ell}(x)$

Par dérivation on a : $P_k^{(\ell+1)}(x) = (k-\ell) 2x (x^2-1)^{k-\ell-1} R_{k\ell}(x) + (x^2-1)^{k-\ell} R_{k\ell}'(x)$

$$= (x^2-1)^{k-(\ell+1)} \left((k-\ell) 2x R_{k\ell}(x) + (x^2-1) R_{k\ell}'(x)\right)$$

$$= (x^2-1)^{k-(\ell+1)} R_{k\ell+1}(x) \text{ en posant}$$

$R_{k\ell+1}(x) = 2(k-\ell) x R_{k\ell}(x) + (x^2-1) R_{k\ell}'(x)$

$F_{\ell+1}$ est vraie

$\forall \ell \in [\![0, k]\!]$, F_ℓ est vraie

(iii) : En appliquant cette égalité en 1 et en -1, on a :

$P_k^{(\ell)}(1) = (1^2-1)^{k-\ell} R_{k\ell}(1) = 0 = ((-1)^2-1) R_{k\ell}(-1) = P_k^{(\ell)}(-1)$

En admettant que $\|Q_k\|^2 = \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{2k+1}$, on a que

$\|L_k\|^2 = \left|\frac{k!}{(2k)!}\right|^2 \|Q_k\|^2$ par 14c)(iii)

$$= \frac{k!^4}{(2k)!^2} \frac{2^{2k+1}}{2k+1}$$

donc comme la norme est positive :

$$\|L_k\| = \frac{k!^2}{(2k)!}\sqrt{2}\cdot\frac{2^k}{\sqrt{2k+1}} = 2^k\sqrt{\frac{2}{2k+1}}\cdot\frac{k!(2k-k)!}{(2k)!}$$

$$= 2^k\sqrt{\frac{2}{2k+1}}\cdot\frac{1}{\binom{2k}{k}}$$

$$\cancel{\text{Or } \|Q_k\|^2 = \langle Q_k, Q_k\rangle = \int_{-1}^{1} Q_k^2(t)\,dt}$$

$$\cancel{= \int_{-1}^{1} P_k^{(k)}(t)^2\,dt}$$

Problème 2 :

Partie 1 :

1) $f \in C^0(\mathbb{R})$ comme ~~quotient~~ inverse bien défini d'une fonction continue

f est positive sur $\mathbb{R}$ car $1+x^2 \geqslant 0$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut $\frac{1}{\pi}\left(\lim_{A\to+\infty} \text{Arctan}(A) - \lim_{B\to-\infty} \text{Arctan}(B)\right)$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= 1$$

Par caractérisation, <u>f est une densité de probabilité.</u>

2) $\int_1^{+\infty} tf(t)dt = \int_1^{+\infty} \frac{t}{\pi(1+t^2)}dt$ avec l'intégrande continue sur $[1;+\infty[$ Or, $\frac{t}{\pi(1+t^2)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi t}$ avec $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\pi t}dt$ diverge à une constante près par le critère de Riemann "car $1 \leqslant 1$". Donc par comparaison et positivité $\int_1^{+\infty} tf(t)dt$ diverge donc $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ diverge. <u>X n'admet pas d'espérance</u>

par définition.

X n'admet pas de moment d'ordre 1 donc X n'admet pas de moment d'ordre 2 par le cours, donc pas de moment centré d'ordre 2, autrement dit, <u>X n'a pas de variance</u>

3) Soit $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\left(\text{Arctan}(x) - \lim_{B \to -\infty} \text{Arctan}(t)\right)$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\text{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2}\right)$$

Arctan est strictement croissant à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc

$\text{Arctan} + \frac{\pi}{2}$ est strictement croissant à valeurs dans $]0, \pi[$, donc

F est strictement croissante à valeurs dans $]0,1[$ car $\frac{1}{\pi} > 0$.

Dès lors, F est continue (car C^1 car $f \in C^0(\mathbb{R})$) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0,1[$. Par le théorème de la bijection monotone,

<u>F réalise une bijection sur $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$</u>

Soit $y \in]0,1[$, $\exists ! x \in \mathbb{R}$ $F(x) = y$ ie $\text{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2} = \pi y$

ie $\text{Arctan}(x) = \pi y - \frac{\pi}{2}$ ie $x = \tan(\pi y - \frac{\pi}{2})$.

Donc on a <u>$F^{-1} : y \mapsto \tan(\pi y - \frac{\pi}{2})$</u>

4) a: Soit $x \in \mathbb{R}$, $P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x))$ car F est strictement croissante

$= F(x)$ car F est à valeurs dans $]0,1[$ et $U \hookrightarrow \mathcal{U}]0,1[$ $\left(F_U(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in]0,1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}\right)$

<u>Donc $F^{-1}(U)$ et X ont la même fonction de répartition donc la même loi</u>

Copie anonyme - n°anonymat : 240871

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 18	Session : 2025

Épreuve de : Maths appro emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

6 :
```
def cauchy():
    U=rd.random()          #simule U
    return(np.tan(pi*U-(pi/2)))
```

5) Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$ $F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(\sqrt{|X|} \leq x)$
$= 0$ car une racine est toujours positive

Soit $x \in \mathbb{R}_+$, $F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(|X| \leq x^2)$ par croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$.

$= P(-x^2 \leq X \leq x^2)$

$= F(x^2) - F(-x^2)$

$= \frac{1}{\pi}\left(\text{Arctan}(x^2) + \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(-x^2) - \frac{\pi}{2}\right)$

$= \frac{2(\text{Arctan}(x^2))}{\pi}$ car Arctan est impaire

Or $x^2 \in C^1(\mathbb{R})$, Arctan $\in C^1(\mathbb{R})$, donc $F_Z \in C^1(\mathbb{R}_+)$ et $\in C^1(\mathbb{R}_-^*)$ comme fonction constante

De plus $F(z) \xrightarrow[z \to 0]{} 0 = F_Z(0)$. Donc $F_Z \in C^0(\mathbb{R})$

Z est bien une variable aléatoire à densité

On obtient une densité f_Z par dérivation là où F_Z est C^1 :

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$f_Z(t) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2t}{1+t^4} = \frac{4t}{\pi(1+t^4)}$. On pose arbitrairement $f_Z(0)=0$.

6) $\int_{-\infty}^{+\infty} |t f_Z(t)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{4t^2}{\pi(1+t^4)}\right| dt$. avec l'intégrande continue sur $\mathbb{R}$

Or $\left|\frac{4t^2}{\pi(1+t^4)}\right| \underset{+\infty}{\sim} \left|\frac{4}{\pi t^2}\right|$ avec $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ convergente par Riemann car $2>1$, donc par comparaison et positivité, $\int_1^{+\infty} t f(t) dt$ converge absolument, donc il en est de même pour $\int_0^{+\infty} t f(t) dt$.

~~De plus l'intégrande est paire~~ Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} |t f(t)| dt$ converge bien

f_Z est nulle sur $\mathbb{R}_-$

i.e Z admet une espérance

$\int_1^{+\infty} t^2 f_Z(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{4t^3}{\pi(1+t^4)} dt$. Or $\frac{4t^3}{\pi(1+t^4)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4}{\pi t}$ avec $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ divergente par Riemann.

Donc par comparaison et positivité, $\int_1^{+\infty} t^2 f_Z(t) dt$ diverge, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_Z(t) dt$ diverge, donc Z n'a pas de moment d'ordre 2, donc Z n'admet pas de variance

7) a : Soit $x \geq 0$, $\frac{\alpha x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\beta x}{(x^2+\sqrt{2}x+1)} = \frac{\alpha x^3 + \sqrt{2}\alpha x^2 + \alpha x + \beta x^3 - \sqrt{2}\beta x^2 + \beta x}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}$

Par identification, on a : devant chaque puissance $\begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \sqrt{2}(\alpha-\beta)=1 \\ \alpha+\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-\beta \\ \sqrt{2}(-2)\beta=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \beta = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$

b: $x \mapsto \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}$ $\in C^0(\mathbb{R}_+)$ comme fonction rationnelle car le dénominateur ne s'annule pas (leur discriminant est négatif). Elles sont positives

En $+\infty$, ces deux fonctions équivalent à $\frac{1}{x^2}$ avec $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge par Riemann car $2>1$.

Donc par comparaison et positivité, ces 2 intégrales convergent sur $[1,+\infty[$, donc sur $[0,+\infty[$

$\forall x \geqslant 0,$

c: $\frac{\alpha}{2}\left(\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)+\frac{\beta}{2}\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right)$

$= \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{2x}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\beta}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{2}x+x^2+1}$

$= \frac{\alpha x}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\beta x}{x^2+\sqrt{2}x+1}$

$E(Z) = \frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}dt = \frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\alpha x}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\beta x}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right)dx$

car $(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1) = x^4+\sqrt{2}x^3+x^2-\sqrt{2}x^3-2x^2-\sqrt{2}x$
$+x^2+\sqrt{2}x+1$
$= x^4+1.$

$= \frac{4}{\pi}\cdot\left(\frac{\alpha}{2}\left(\int_0^{+\infty}\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx+\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx\right)+\frac{\beta}{2}\left(\int_0^{+\infty}\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx-\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx\right)\right)$

$= \frac{2\alpha}{\pi}\left(\lim_{A\to+\infty}\left(\ln(x^2-\sqrt{2}x+1)-\ln(1)+\frac{\sqrt{2}\cdot 3\pi}{2\sqrt{2}}\right)+\beta\left(\lim_{A\to+\infty}\ln(x^2+\sqrt{2}+1)-\ln(1)+\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)\right)$

par primitive et par 7b)

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\left(\lim_{A \to +\infty} \ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + \frac{3\pi}{2} \right) - \lim_{A \to +\infty} \ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1) - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \left(\lim_{A \to +\infty} \ln \left(\frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right) + \pi \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ , car } \ln \left(\frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \text{ ,}$$

ce qui n'est pas le résultat escompté.

8) Le premier programme regarde la proportion de variables $Z_n = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} Z_i}{n}$ qui se rapproche de l'espérance commune des Z_i (suivant la loi de Z) pour un epsilone donné.

Le deuxième programme donne une matrice qui simule 28 fois ce programme selon des n et des epsilons différents

Plus le ε est grand plus cette moyenne sera élevée car la distance à l'espérance est grande. Plus n est grand plus il se rapproche de l'infini, le test se rapproche alors de la Loi faible des grands nombres

On voit que $Z_n \xrightarrow[P]{} \sqrt{2} = E(Z)$ avec la dernière colonne de la matrice

ie $\lim_{n \to +\infty} P(|Z_n - \sqrt{2}| \leq \varepsilon) = 1$

Cependant, on ne peut appliquer ce théorème car les Z_i n'ont pas de variance.

Partie 2

9) $1_A \hookrightarrow \mathcal{B}(P(A))$ $E(1_A) = P(A)$, $V(A) = P(A)(1 - P(A))$

Copie anonyme - n°anonymat : 240871

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 18 | Session : 2025

Épreuve de : Maths appro emlyon

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

10a : $\forall \omega \in \Omega$, si $\omega \in [X>s]$, alors $1_{[X>s]}(\omega) = 1$ et

$\chi_{]s,+\infty[}(X(\omega)) = 1$ car $X(\omega) > s$ ie $X(\omega) \in]s,+\infty[$

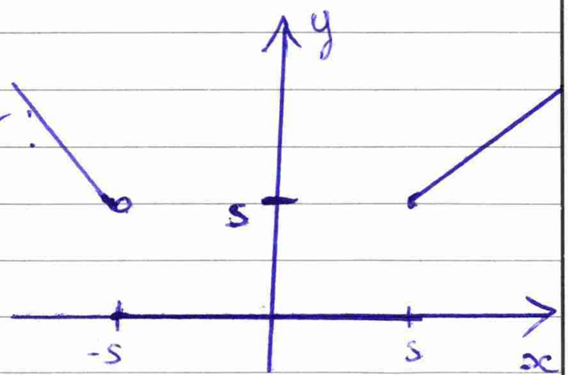
Si $\omega \in \overline{[X>s]}$, $1_{[X>s]}(\omega) = 0 = \chi_{]s,+\infty[}(X(\omega))$ car $X(\omega) \leq s$.

$([X>s], \overline{[X>s]})$ est un système complet d'évènements.

Donc $\underline{\forall \omega \in \Omega, \ 1_{[X>s]}(\omega) = \chi_{]s,+\infty[}(X(\omega))}$

b : $\varphi_s(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| > s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Donc la courbe représentative de φ_s est :
dans un repère orthonormée



<u>Les points de discontinuité de φ_s sont s et -s</u>

11) $\underline{Y_k = X_k' - Z_k}$ car si $|X_k| > M$, $Z_k = X_k$ et $Y_k = 0$ et
si $|X_k| \leq M$, $Y_k = X_k$ et $Z_k = 0$

$([|X_k| > M], [|X_k| \leq M])$ est un système complet d'évènements

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

~~13) b : $Z_n \leq$~~

19) $X_n = Y_n + Z_n$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{X_n} = \overline{Y_n} + \overline{Z_n}$

Donc $\forall t > 0$, $P(|\overline{X_n}| > t) = P(|\overline{Y_n} + \overline{Z_n}| > t) \leq P([|\overline{Y_n}| > \frac{t}{2}] \cup [|\overline{Z_n}| > \frac{t}{2}])$

par passage à la probabilité dans l'inclusion $\leq P(|\overline{Y_n}| > \frac{t}{2}) + P(|\overline{Z_n}| > \frac{t}{2})$

20) $\overline{X_n} \longrightarrow E(X_i)$ par la loi faible des grands nombres

car $E(X_i) = 0$ et les X_i ont la loi de X.