Partie 1 :

3) Soit $u^* : F \to E$, $y \mapsto z_y$ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(y, y') \in F^2$

$u^*(\lambda y + y') = z_{\lambda y + y'}$ tel que $\forall x \in E$, $\langle u(x), \lambda y + y' \rangle_F = \langle z_{\lambda y + y'}, x \rangle_E$

ie $\forall x \in E$, $\lambda \langle u(x), y \rangle_F + \langle u(x), y' \rangle_F = \langle z_{\lambda y + y'}, x \rangle_E$ par bilinéarité du produit scalaire.

Or $y \in F$, $y' \in F$, donc $\exists ! (z_y, z_{y'}) \in E^2$ tel que $\forall x \in E$,

$\langle u(x), y \rangle_F = \langle z_y, x \rangle_E$ et $\langle u(x), y' \rangle_F = \langle z_{y'}, x \rangle_E$

En reprenant la première égalité et en remplaçant, on a :

$\lambda \langle z_y, x \rangle_E + \langle z_{y'}, x \rangle_E = \langle z_{\lambda y + y'}, x \rangle_E$ ie $\langle z_{\lambda y + y'} - (\lambda z_y + z_{y'}), x \rangle_E = 0$

ie $z_{\lambda y + y'} - (\lambda z_y + z_{y'}) \in E^\perp$ car l'égalité vaut pour tout $x \in E$.

Or, $E^\perp = \{0\}$

Donc : $z_{\lambda y + y'} - (\lambda z_y + z_{y'}) = 0$ ie $z_{\lambda y + y'} = \lambda z_y + z_{y'}$

ie $u^*(\lambda y + y') = \lambda u^*(y) + u^*(y')$

$u^* \in \mathcal{L}(F, E)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

4) On admet que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E\mathcal{B}_F}(u^*) = {}^tA$ et on sait que $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F\mathcal{B}_E}(u)$

Or $rg(A) = rg({}^tA)$ par le cours, donc $\underline{rg(u) = rg(u^*)}$.

$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F\mathcal{B}_E}((u^*)^*) = {}^t({}^tA) = A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F\mathcal{B}_E}(u)$. Donc $\underline{(u^*)^* = u}$

5) ~~Soit $x \in Ker(u)^\perp$, $\forall y \in Ker(u)$, $\langle x, y\rangle_E = 0$ et $u(y) = 0$, donc $\langle x,y\rangle_E = \langle x, u(y)\rangle = 0$~~

~~Montrons que $\exists t \in F$, $u^*(t) = x$. Or par définition de u,~~

~~$\langle x, y\rangle_E = \langle u(x), u(y)\rangle$ car $(u^*)^* = u$~~

Par le théorème du rang : $\dim \mathrm{Im}\, u^* + \dim \mathrm{Ker}\, u^* = n = \dim F$

$\dim \mathrm{Im}\, u + \dim \mathrm{Ker}\, u = p = \dim E$

et on a : $\dim(\mathrm{Ker}\, u)^\perp + \dim \mathrm{Ker}\, u = p$

Soit $y \in \mathrm{Im}(u^*)$, $\exists x \in F$, $u^*(x) = y$. Soit $z \in \mathrm{Ker}(u)$.

$\langle y, z\rangle_E = \langle u^*(x), z\rangle_E = \langle u(z), x\rangle_F$ par l'identité (1).

$= 0$ car $z \in \mathrm{Ker}(u)$

Donc $y \in \mathrm{Ker}(u)^\perp$. $\mathrm{Im}(u^*) \subset \mathrm{Ker}(u)^\perp$

Or $\dim \mathrm{Im}\, u = \dim \mathrm{Im}\, u^*$ ie $\dim \mathrm{Im}\, u^* = p - \dim \mathrm{Ker}\, u$

$= \dim(\mathrm{Ker}\, u)^\perp$ par la troisième égalité

Donc par inclusion et égalité des dimensions $\underline{\operatorname{Im} u^* = \operatorname{Ker}(u)^\perp}$

6) Soit $x \in \operatorname{Ker}(u)$, $u(x) = 0$ donc $(u^* \circ u)(x) = u^*(0) = 0$ car u^* est linéaire
$\operatorname{Ker}(u) \subset \operatorname{Ker}(u^* \circ u)$.

Soit $X \in \operatorname{Ker}({}^tAA)$, $X \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{R})$

${}^tAAX = 0$ donc ${}^tX\,{}^tAAX = {}^tX\ 0 = 0$ ie $\|AX\|^2 = 0$ par le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{p1}(\mathbb{R})$, ie $AX = 0$
donc $X \in \operatorname{Ker}(A)$

Alors $\operatorname{Ker}({}^tAA) \subset \operatorname{Ker}(A)$, vectoriellement on a $\operatorname{Ker}(u^* \circ u) \subset \operatorname{Ker}(u)$

Par double inclusion $\underline{\operatorname{Ker}(u^* \circ u) = \operatorname{Ker}(u)}$

~~Soit $y \in \operatorname{Im}(u^* \circ$~~ Ainsi $\operatorname{Ker}(u^* \circ u)^\perp = \operatorname{Ker}(u)^\perp \underset{\text{par } 5)}{=} \operatorname{Im}(u^*)$

~~Or en appliquant 5à u^*~~ Or $\operatorname{Ker}(u^* \circ u)^\perp = \operatorname{Im}(u^* \circ u)$

car $\forall y \in \operatorname{Im}(u^* \circ u)$, $\exists t \in E$, $(u^* \circ u)(t) = y$. Soit $x \in \operatorname{Ker}(u^* \circ u)$

$\langle y, x \rangle_E = \langle u^*(u(t)), x \rangle_E = \langle u(t), u(x) \rangle_F$ par (1)
$= 0$ car $x \in \operatorname{Ker}(u^* \circ u) = \operatorname{Ker}(u)$

Donc $\operatorname{Im}(u^* \circ u) \subset \operatorname{Ker}(u^* \circ u)^\perp$ et $\dim \operatorname{Im}(u^* \circ u) + \dim \operatorname{Ker}(u^* \circ u) = p$
$\dim \operatorname{Ker}(u^* \circ u)^\perp + \dim \operatorname{Ker}(u^* \circ u) = p$

Donc par inclusion et égalité de dimensions, $\operatorname{Ker}(u^* \circ u)^\perp = \operatorname{Im}(u^* \circ u)$

Donc $\underline{\operatorname{Im}(u^* \circ u) = \operatorname{Im}(u)}$

7) $\forall x \in \operatorname{Im} u^*$, $w(x) = u^*(u(x)) \in \operatorname{Im} u^*$ par définition.

w est linéaire comme composée d'applications linéaires.

Soit $x \in \operatorname{Im} u^*$, $w(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker}(u^* \circ u) = \operatorname{Ker}(u)$ par 6)
$= \operatorname{Im}(u^*)^{\perp}$ par 5

Donc $w(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \operatorname{Im}(u^*) \cap (\operatorname{Im}(u^*))^{\perp}$
$\Leftrightarrow x = 0$

w est injectif et est un endomorphisme $\dim \operatorname{Im}(u^*) \leqslant n$

Donc w est un isomorphisme

Matriciellement, cela donne que $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, ${}^tAAX = {}^tAY$.
avec $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car ${}^tAAX \in \operatorname{Im}({}^tA)$

8)a: Il faut montrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tAQX = {}^tAX$ ie

que $\operatorname{Im}({}^tAQ) = \operatorname{Im}({}^tA)$. Or $QX \in \operatorname{Im}(Q) \subset \operatorname{Im}(A)$
car Q est la matrice du projecteur orthogonal sur $\operatorname{Im} u$.

Donc $\operatorname{Im}({}^tAQ) \subset \operatorname{Im}({}^tAA) = \operatorname{Im}({}^tA)$ par 6).

Si $X \in \operatorname{Im} {}^tA$, $\exists y \in F = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Im}(u)^{\perp}$, ${}^tAY = X$ ie
tel que $Y = \operatorname{mat}(y)$

${}^tA(Y_1 + Y_2) = X$ avec $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} u \times \operatorname{Im}(u)^{\perp}$ où $Y_1 = \operatorname{mat}(y_1)$ et $Y_2 = \operatorname{mat}(y_2)$
ie ${}^tAY_1 = X$ car $Y_2 \in \operatorname{Im}(u)^{\perp} = \operatorname{Ker}(u^*)$ en appliquant 5) à u^*.

Donc $X = {}^tAQY$ selon la décomposition de y dans $\operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Im} u^{\perp}$

$X \in \operatorname{Im}({}^tAQ)$.

On a donc bien ${}^tAQ = {}^tA$

Copie anonyme - n°anonymat : 240871

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 12 | Session : 2025

Épreuve de : Maths appro ESSEC/HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

9) M est inversible $\Leftrightarrow rg({}^tAA)=p$ car ${}^tAA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow rg(w)=p$ car ${}^tAA = mat(w)$

$\Leftrightarrow \dim Im(u^*)=p$ car w est un isomorphisme

$\Leftrightarrow \dim(Ker\, u)^\perp = p$ par 5)

$\Leftrightarrow \dim Ker(u) = 0$ car $\dim Ker\, u + \dim (Ker\, u)^\perp = p$

$\Leftrightarrow rg(u)=p$

$\Leftrightarrow rg(A)=p$.

~~10)a : $rg(A)=p$ ie $\dim Im(u)=p$~~
~~A est inversible car $rg(A) \leq \min(n,p)$~~
~~$\leq p$ car $n \geq p$.~~

~~Donc ${}^tA$ est inversible par le cours.~~

~~Ainsi en multipliant l'équation de la 8)a : par $({}^tA)^{-1}$ à gauche, on obtient : $Q = I_n$~~

~~Or, $AM^{-1}\,{}^tA = A({}^tAA)^{-1}\,{}^tA$ car M est inversible~~

~~$= AA^{-1}({}^tA)^{-1}\,{}^tA$~~

~~$= I_n$~~

~~Donc $Q = AM^{-1}\,{}^tA$~~

10b:

```
def PythonCalcule_Q(A):
    x,y = np.shape(A)          #on attribue le nombre de lignes et colonnes de A à x et y
    if al.matrix_rank(A)==y:
        M=np.dot(np.transpose(A),A)                 #M=tAA
        N=np.dot(al.inv(M),np.transpose(A))         #N=M^-1 tA
        return(np.dot(A,N))
    else:
        return('error')
```

11) $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXMX = {}^tX{}^tAAX = {}^t(AX)AX = \|AX\|^2$ où l'on a la norme du produit scalaire canonique dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Donc comme une norme est positive, $\underline{{}^tXMX \geq 0}$

Partie II :

12) Soit $(X,H) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})^2$,

$$J_0(X+H)-J_0(X) = \frac{1}{2}\|A(X+H)-Y\|^2 - \frac{1}{2}\|AX-Y\|^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|AX-Y\|^2 + \|AH\|^2 + 2\langle AX-Y, AH\rangle\right) - \frac{1}{2}\|AX-Y\|^2$$

$$= \frac{\|AH\|^2}{2} + \langle AX-Y, AH\rangle$$

$$= \frac{\langle AH, AH\rangle}{2} + {}^tH{}^tA(AX-Y)$$

$$= \frac{{}^tH{}^tAAH}{2} + {}^tH({}^tAAX - {}^tAY)$$

$$= \frac{{}^tHMH}{2} + \langle D(X), H\rangle \quad \text{car } D(X) = MX - {}^tAY = {}^tAAX - {}^tAY$$

15) b : $A(X - X_0) = AX - AX_0$
$= QY - QY$ car $X \in S_0$ et $X_0 \in \mathrm{Ker}\,A^{\perp} \cap S_0 \subset S_0$
$= 0$ donc par 15a) $AX_0 = QY$

$X - X_0 \in \mathrm{Ker}\,A$

c : Si $rg(A) = p$, comme $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$, $\dim \mathrm{Ker}(A) = 0$ donc

$\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$, ainsi $\mathrm{Ker}(A)^{\perp} = \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{R})$.

Dès lors $\exists\, X_0 \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{R})$ tel que $S_0 \cap \mathrm{Ker}(A)^{\perp} = S_0 = \{X_0\}$.

Il y a donc une unique solution à l'équation $D(X) = 0$ ie ${}^tAAX = {}^tAY$

Or, $X = M^{-1}\,{}^tAY$ vérifie cette équation car ${}^tAAX = MM^{-1}\,{}^tAY$
$= {}^tAY$

Donc $S_0 = \{M^{-1}\,{}^tAY\}$

16)a : $T = \|A(X - U_0)\|^2$
$= \|A(M^{-1}\,{}^tAY - U_0)\|^2$
$= \|A(M^{-1}\,{}^tA(AU_0 + Z) - U_0)\|^2$
$= \|A(M^{-1}({}^tAA)U_0 + M^{-1}\,{}^tAZ - U_0)\|^2$
$= \|A(U_0 + M^{-1}\,{}^tAZ - U_0)\|^2$ car ${}^tAA = M$
$= \|AM^{-1}\,{}^tAZ\|^2$
$= \|QZ\|^2$ car $Q = AM^{-1}\,{}^tA$ car $rg(A) = p$.

$= \langle QZ, QZ \rangle$ par le produit scalaire canonique
$= {}^tZ\,{}^tQQZ$
$= {}^tZ\,{}^t({}^tA\,{}^tM^{-1}\,{}^tA)$ QZ
$= {}^tZ\,A\,{}^t(A^{-1}\,{}^tA^{-1})\,{}^tA\,QZ$
$= {}^tZAA^{-1}\,{}^tA^{-1}\,{}^tAQZ$
$= {}^tZQZ$.

b :

```
def simuleT(A, sigma):
    M = np.dot(np.transpose(A), A)
    N = np.dot(A, al.inv(M))
    Q = np.dot(N, np.transpose(A))  } x,y = np.shape(Q)
    Z = np.zeros(x)                   # matrice ligne
    for i in range(x):
        z[i] = rd.normal(0, sigma)
    K = np.dot(z, Q)
    return(np.dot(K, np.transpose(z)))
```

c :

```
def esperance(A, sigma):
    S=0
    for k in range(10000):      # un nombre assez grand
        S += simuleT(A, sigma)
    return(S/10000)
```

Ce programme renvoie la valeur moyenne des T, se rapprochant de l'espérance.

d : lorsque les $z_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, on peut conjecturer que T se rapproche du rang de la matrice A qu'on rentre car

$rg(A_1) = 2$, $rg(A_2) = 3$ $rg(A_3) = 5$, (leurs colonnes étant échelonnées).

Dans le deuxième programme, on peut conjecturer que pour la matrice A_1, $E(T) = 2\sigma^2$
$= 2V(z_i)$

e : $E(Z_1^2) = V(Z_1) + E(Z_1)^2$ par la formule de Koenig-Huygens
$= \sigma^2$

Copie anonyme - n°anonymat : 240871

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 12 | Session : 2025

Épreuve de : Maths appro ESSEC/HEC

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

f : $T = {}^tZQZ = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_i z_j Q_{ij}$

$= \sum_{i=1}^{n} z_i^2 Q_{ii} + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} z_i z_j Q_{ij}$

$= T_1 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} Q_{ij} z_i z_j$

$= T_1 + 2T_2$

Par linéarité de l'espérance, $E(T) = E(T_1) + 2E(T_2)$.

e : les z_i sont des variables mutuellement indépendantes donc par le lemme des coalitions, toutes les puissances de z_i sont mutuellement indépendantes.

$E(z_i^3) = E(z_i^2 z_i) = E(z_i^2)E(z_i)$ par le cours

$= \sigma^2 \sigma$

$= \sigma^3$

$E(z_i^4) = E(z_i^2 z_i^2) = \sigma^2 \quad \sigma^2 = \sigma^4$.

~~On fait l'hr~~ Par itérations, on montre que $\forall n\in\mathbb{N}$ $E(z_i^n) = \sigma^n$.

f : Donc $E(T) = \sum_{i=1}^{n} Q_{ii} E(z_i^2) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} Q_{ij} E(z_i)E(z_j)$ par linéarité de l'espérance et indépendance mutuelle.

$= \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^{n} Q_{ii} + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} Q_{ij}\right)$

$= \sigma^2 \cdot \left(\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} Q_{ij}\right)$ Il faut montrer que $\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} Q_{ij} = 2$

b) $E(T_1^2) = E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} Q_{ii} z_i^2\right)^2\right)$

$= E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} Q_{ii}^2 z_i^4 + 2\sum_{1\le j<k\le n} Q_{kj} z_j^2 z_k^2\right)\right)$

$=$

(i) $V(T) = E(T^2) - E(T)^2$ par la formule de Kœnig-Huygens

$= E(T_1^2 + 4T_1T_2 + 4T_2^2) - (E(T_1) + 2E(T_2))^2$

$= E(T_1^2) + 4E(T_2^2) - E(T_1)^2 - 4E(T_1)E(T_2) - 4E(T_2)^2$

$= \sigma^4(2q+p^2) + 2\sigma^4(p-q) - 4\sigma^2\left(\sum_{i=1}^{n} Q_{ii} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} Q_{ij}\right) - 4\sigma^4\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} Q_{ij}\right)^2$

Partie III :

18) En admettant que $-D(X_0) = {}^tB \frac{BX_0}{\|BX_0\|}$ si $BX_0 \neq 0$

On a que $-D(X_0) = {}^tBV$, avec $V = \frac{BX_0}{\|BX_0\|}$ $\|V\| = 1 \leq 1$

$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$\|BX\| \frac{BX_0}{\|BX_0\|} - BX_0 = 0$. Donc $-D(X_0) \in \mathcal{N}(X_0)$

19c : $\mathrm{Ker}(B)^{\perp} = \mathrm{Im}({}^tB)$ par I)5)

Donc si $D(X_0) \in \mathrm{Ker}(B)^{\perp} = \mathrm{Im}\,{}^tB$, $\exists W \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tBW = D(X_0)$

d : Or $\mathrm{Im}\,{}^tB = \mathrm{Im}({}^tBB)$ par 6) ie $\exists V \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ {}^tBBV = D(X_0)$

donc $D(X_0) \in \mathrm{Im}({}^tBB)$

e : ~~En admettant que $\|BV\| \leq 1$, on a donc $-D(X_0) = {}^tB(-BV)$~~

~~avec $\|-BV\| = \|BV\| \leq 1$. et $\|BX_0\|(-BV) - BX_0 = -B($...~~

20)a : $\|u+v\|^2 - \left(\|u\| + \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right)^2 = \|u^2\| + \|v\|^2 + 2\langle u,v\rangle - \|u\|^2 - 2\langle u,v\rangle - \frac{\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}$

$$= \|v\|^2 - \frac{\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}$$

$$= \frac{\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}.$$

b : $\|u+v\| - \|u\| \geq \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|} \iff \|u+v\|^2 \geq \left(\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|} + \|u\|\right)^2$ par croissance de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$

$$\iff \frac{\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2} \geq 0$$

ce qui est vrai par l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\langle u,v\rangle^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$
et car $\|u\|^2 > 0$.

Donc on a bien $\|u+v\| - \|u\| \geq \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}$

23b : soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, $\lambda_1 < \lambda_2$

On a $(\lambda_1 + \alpha_i^2)^2 < (\lambda_2 + \alpha_i^2)^2$ $\forall i \in [\![1,K]\!]$, $\alpha_i^2 \geq 0$

ie $\frac{1}{(\lambda_1+\alpha_i^2)^2} > \frac{1}{(\lambda_2+\alpha_i^2)^2}$ par décroissance de la fonction inverse

ie $\frac{\alpha_i^2 y_i^2}{(\lambda_1+\alpha_i^2)^2} > \frac{\alpha_i^2 y_i^2}{(\lambda_2+\alpha_i^2)^2}$ car $\alpha_i^2 y_i^2 \geq 0$.

donc $\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i^2 y_i^2}{(\lambda_1+\alpha_i^2)^2} > \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i^2 y_i^2}{(\lambda_2+\alpha_i^2)^2}$

ie $F(\lambda_1) > F(\lambda_2)$

Donc F est strictement décroissante. De plus $F \in C^0(\mathbb{R}_+)$ comme somme de fonctions rationnelles bien définies. Par le théorème de la bijection monotone, F est bijective.

De plus, $F(0) = -1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i^2 y_i^2}{\alpha_i^4} = -1 + p(Y) > 0$ car $p(Y) > 1$

Donc $\exists! \lambda_0 \in]0, +\infty[,\ F(\lambda_0) = 0$, F étant strictement décroissante.

En appliquant l'inégalité de la 23)a. à $\lambda_0 > 0$, on obtient

$F(\lambda_0) \leq -1 + \frac{1}{4\lambda_0} \sum_{i=1}^{k} y_i^2$ ie $1 \leq \frac{1}{4\lambda_0} \sum_{i=1}^{k} y_i^2$

ie $\lambda_0 \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{k} y_i^2$

d. (i)

```
def FoncSom(alpha, Y, lda):
    S = 0
    x, y = np.shape(Y)
    if np.shape(Y) != np.shape(alpha):
        return('error')
    else:
        for i in range(1, y+1):
            S = S + (alpha[i]**2 * Y[i]**2)/(lambda+alpha[i]**2)**2
        return(S-1)
```