Copie anonyme - n°anonymat : 240871

Z5-00090
240871
Mat2 Appro

Code épreuve : 283	Nombre de pages : 16	Session : 2025

Épreuve de : Maths 2 appro ESCP/HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Première partie :

1) a : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $E(X_i^2) = V(X_i) + E(X_i)^2$

d'après la formule de Koenig-Huygens. Or $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ donc $E(X_i) = 0$ et $V(X_i) = 1$

Alors $E(X_i^2) = 1$. Par linéarité de l'espérance, $E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2)$
$= \sum_{i=1}^{n} 1$
$= n$

Donc S_n admet une espérance qui vaut n.

b :
```
def simul(n):
    S=0
    x = rd.normal(0,1)

    for i in range(1, n+1):
        S=S+x**2        #on somme n fois Xi^2
    return(S)
```

c : Le programme calcule d'abord $\frac{\sum_{k=0}^{N-1} S_n^2}{N} - n^2$

Puis pour $N = 50000$, que l'on apparentera à $N \to +\infty$ pour Python, on remarque graphiquement que $\forall n \in [\![1,9]\!]$,

$\lim_{N \to +\infty} \frac{\sum_{k=0}^{N-1} S_n^2}{N} - n^2 = 2n$ autrement dit,

en posant S_i suivant la loi de S_n, on a que
pour $i \in \mathbb{N}$

$$\overline{S_N^2} - n^2 \xrightarrow[N \to +\infty]{} 2n$$ autrement dit la valeur moyenne des S_n^2 tendrait vers $2n + n^2$. On peut conjecturer que $E(S_n^2) = 2n + n^2$

2a: Soit $x \in \mathbb{R}$, $F_{W_1}(x) = P(W_1 \leq x) = P(\frac{1}{2} S_1 \leq x) = P(X_1^2 \leq 2x)$

Donc $P(W_1 \leq x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}_-^*$ car $X_1^2 \geq 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$

$$P(W_1 \leq x) = P(|X_1| \leq \sqrt{2}\sqrt{x})$$ par croissance de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$
$$= P(-\sqrt{2x} \leq X_1 \leq \sqrt{2x})$$
$$= \Phi(\sqrt{2x}) - \Phi(-\sqrt{2x})$$ où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite
$$= 2\Phi(\sqrt{2x}) - 1$$
par propriété de Φ.

Donc $F_{W_1} \in C^1(\mathbb{R}_-^*)$ comme fonction constante
$F_{W_1} \in C^1(\mathbb{R}_+^*)$ comme composée de fonctions C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

$\lim_{x \to 0^-} F_{W_1}(x) = 0 = F_{W_1}(0)$ car $F_{W_1}(0) = 2\Phi(0) - 1 = \frac{2}{2} - 1 = 0$

Donc $F_{W_1} \in C^0(\mathbb{R})$. Alors par caractérisation, W_1 est une variable aléatoire à densité dont une densité est donnée par dérivation là où $F_{W_1} \in C^1$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f_{W_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}_-^* \\ 2\varphi(\sqrt{2x}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2x}} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$ → valeur arbitrairement donnée.

ie $$\forall x \in \mathbb{R}, \ f_{W_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}_- \\ \frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

b : Or une densité de la loi $\gamma(\frac{1}{2})$ est donnée par $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} x^{1/2-1} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

~~Or, une fonction de répartition de X_1^2 est donnée par $\forall x \in \mathbb{R}$~~

$$\cancel{F_{X_1^2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 2\Phi(\sqrt{x})-1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$ ~~comme précédemment~~

~~Donc une densité de X_1^2 est~~ $$\cancel{\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$

On remarque donc par identification que $\underline{\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}}$.

$W_1 \hookrightarrow \gamma(\frac{1}{2})$

c : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\underline{W_n \hookrightarrow \gamma(\frac{n}{2})}$ par stabilité de la loi gamma par la somme car les $\frac{X_i^2}{2}$ sont mutuellement indépendants par le lemme des coalition

d : Donc $E(S_n) = E(2W_n) = 2E(W_n)$ par linéarité de l'espérance
$= 2 \cdot \frac{n}{2}$
$= n$

$V(S_n) = V(2W_n) = 4V(W_n)$ par propriété de la variance
$= 4 \cdot \frac{n}{2}$
$= 2n$

3)a : Soit $n \geqslant 3$, $t \mapsto \frac{1}{t} \in C^0(\mathbb{R}_+^*)$ et f_{W_n} est nulle sur $\mathbb{R}_-$.

Donc par le théorème de transfert, $\frac{1}{W_n}$ admet une espérance si et seulement si

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t} dt$ converge absolument

Or cette intégrale est égale à $\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{+\infty} t^{\frac{n}{2}-2} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ qui converge bien car $\frac{n}{2}-1 \geqslant 0$ car $n \geqslant 3$.

Donc $E(\frac{1}{W_n})$ existe et vaut $\frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{n}{2})}$

Donc $E(\frac{1}{S_n}) = E(\frac{1}{2W_n}) = \frac{1}{2} E(\frac{1}{W_n}) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{2\Gamma(\frac{n}{2})}$ par linéarité de l'espérance

$= \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{2(\frac{n}{2}-1)\Gamma(\frac{n}{2}-1)}$ par propriété de Γ

$= \frac{1}{n-2}$

6: De la même manière, on montre que $\frac{1}{\sqrt{W_n}}$ admet une espérance par le théorème de transfert qui vaut $\frac{\Gamma(\frac{n}{2}-\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ car $\frac{n}{2}-1-\frac{1}{2} \geqslant 0$ puisque $n \geqslant 3$.

Ainsi par linéarité de l'espérance, comme $\frac{1}{\sqrt{S_n}} = \frac{1}{\sqrt{2W_n}}$, alors $\forall n \geqslant 3$, $\frac{1}{\sqrt{S_n}}$ admet une espérance

4) Soit $\alpha \in]0,1[$, la densité de T_n est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc sa fonction de répartition est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0,1[$. De plus elle est continue car T_n est supposée à densité.
Par le théorème de la bijection monotone, $F_{T_n} : x \mapsto P(T_n \leq x)$ est bijective. $\mathbb{R} \to]0,1[$

Donc $\forall t_{n\alpha} \in \mathbb{R}$ $P(|T_n| \leqslant t_{n\alpha}) = P(-t_{n\alpha} \leq T_n \leq t_{n\alpha}) = F_{T_n}(t_{n\alpha}) - F_{T_n}(-t_{n\alpha})$

Or $\exists!(b,c)\in]0,1[^2$ tel que $F_{T_n}(t_{n\alpha}) = b$ et $F_{T_n}(-t_{n\alpha}) = c$

Donc $\exists!(b,c) \in]0,1[^2$ tel que $F_{|T_n|}(t_{n\alpha}) = b-c \in]0,1[$

Donc $\forall \alpha \in]0,1[\ \exists! \, t_{n\alpha} \in \mathbb{R}, \ P(|T_n| \leq t_{n\alpha}) = 1-\alpha$.

5)a : Soit $n \geq 3$. $T_n = Y \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{S_n}}$. Or Y et $\frac{1}{\sqrt{S_n}}$ sont indépendants car Y est indépendante des X_k $_{k\in[\![1,n]\!]}$ donc des X_k^2 par le lemme des coalitions, puis de S_n puis de $\sqrt{S_n}$ puis de $\frac{1}{\sqrt{S_n}}$ par le lemme des coalitions (avec $S_n \neq 0$ presque sûrement comme variable à densité)

Donc $E(T_n)$ existe par produit car $E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right)$ existe et vaut $E(Y)\cdot\sqrt{n}\, E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right) = 0$ car $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

b : Soit $n \geq 3$, $V(T_n)$ existe car Y admet une variance et $\sqrt{\frac{n}{S_n}}$ admet un moment d'ordre 2 (car $E\left(\frac{1}{S_n}\right)$ existe)

Donc par la formule de König-Huygens, $V(T_n) = E(T_n^2) - E(T_n)^2$
$= E\left(Y^2 \cdot \frac{n}{S_n}\right) - 0^2$
$= E(Y^2)\, n\, E\left(\frac{1}{S_n}\right)$ par indépendance de Y^2 et $\frac{n}{S_n}$ (par le lemme des coalitions)
$= (V(Y) + E(Y)^2)\, n \cdot \frac{1}{n-2} = \frac{n}{n-2}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

c: T_n, Y et T_nY admettent un moment d'ordre 2 chacun, donc $E((T_n-Y^2))$ existe et vaut

$$E(T_n^2 - 2T_nY + Y^2) = E(T_n^2) - 2E\left(Y^2 \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{S_n}}\right) + E(Y^2)$$

$$= \frac{n}{n-2} + 0 - 2E(Y^2)\cdot\sqrt{n}\,E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right) + 1$$

par la formule de Koenig-Huygens et par indépendance (par le lemme des coalitions)

$$= \frac{n}{(n-2)} - 2\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right) + 1$$

car $\frac{1}{\sqrt{W_n}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{S_n}}$

$$= \frac{n+(n-2)}{n-2} - \sqrt{2n}\,E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$$

$$= \frac{2n-2}{n-2} - \sqrt{2n}\,E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$$

6) a: Soit $n \geq 3$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{E\left(\frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}}\right)}{E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)} = \frac{\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}}{\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}}$ par 3a)

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}-1\right)}{\left(\frac{n+1}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}-1\right)} \cdot \frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}$$

$$= \frac{\frac{n}{2}-1}{\frac{n+1}{2}-1} = \frac{n-2}{n-1} < 1$$

Donc (u_n) est décroissante

~~$u_2 = E\left(\frac{1}{\sqrt{w_2}}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)} = \frac{\Gamma(0)}{\Gamma(1)} = 1$~~

~~Or $E\left(\frac{1}{w_2}\right)$ existe $\iff \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\Gamma(1)} t^0 e^{-t} dt$ converge absolument~~

~~$\iff \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge absolument~~

~~Or soit $A>0$. $\int_0^A \frac{e^{-t}}{t} dt = \left[\ln(t) e^{-t}\right]_0^A + \int_0^A \ln(t) e^{-t}$~~

~~6)a : $\forall n \geq 2$, $u_n = E\left(\frac{1}{\sqrt{w_n}}\right)$~~

~~Or $E(T_n) = E\left(Y \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{S_n}}\right) = E(Y) \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} E\left(\frac{1}{\sqrt{w_n}}\right)$ par indépend~~

6)c :
```
def suite_u(n):
    u = A                  # A est la valeur de u2 trouvée en 6a)
    M = np.zeros(n-1)   M[0] = u
    for i in range(1 , n):
        M[i] = 2/((i+1-1)*M[i-1])   # u_{n+1} = 2/((n-1)u_n) avec un décalage de 1
    return(M)                     (M[1] = u3 = 2/((2-1)(u2)))
```

d : Ce programme illustre l'ensemble des points $(n, n^*u_n^2)$ pour $n \in [\![2, 79]\!]$.

On remarque que $nu_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$ ie on peut conjecturer que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$ (en effet $\forall n \geq 2$, $u_n \geq 0$ par positivité de l'espérance car $\frac{1}{\sqrt{w_n}} \geq 0$.)

e : (u_n) est décroissante (6a) et minorée par 0, donc par le théorème de la limite monotone (u_n) converge vers l.

L'égalité 6b donne $\ell^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n-1}$ lorsqu'on tend n vers $+\infty$.

ie $\ell^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$ ie $\ell \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n}}$. Or $U_n \xrightarrow[+\infty]{} \ell$ donc $U_n \underset{+\infty}{\sim} \ell$.

Ainsi $\underline{U_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n}}}$ La conjecture est vérifiée.

7) Soit $\varepsilon > 0$,

$0 \leq P(|T_n - Y| \geq \varepsilon) \leq \frac{E((T_n-Y)^2)}{\varepsilon^2}$ d'après l'inégalité de Markov

$\leq \frac{2n-2}{n-2} - \sqrt{2n}\, U_n$

Or $\frac{2n-2}{n-2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2n}{n} = 2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$ et $\sqrt{2n}\, U_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2n}\sqrt{\frac{2}{n}} = 2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{E((T_n-Y)^2)}{\varepsilon^2} = \frac{2-2}{\varepsilon^2} = 0$

Donc par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|T_n - Y| \geq \varepsilon) = 0$ ie $\underline{T_n \xrightarrow{P} Y}$

<u>Deuxième partie:</u>

8) $\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+y \leq 2 \text{ et } x-y \leq -1\}$

Ainsi $\forall (x,y) \in \mathcal{A}$, $x \leq 2-y$ et $x \leq y-1$ ie $y \leq 2-x$ et $y \geq x+1$

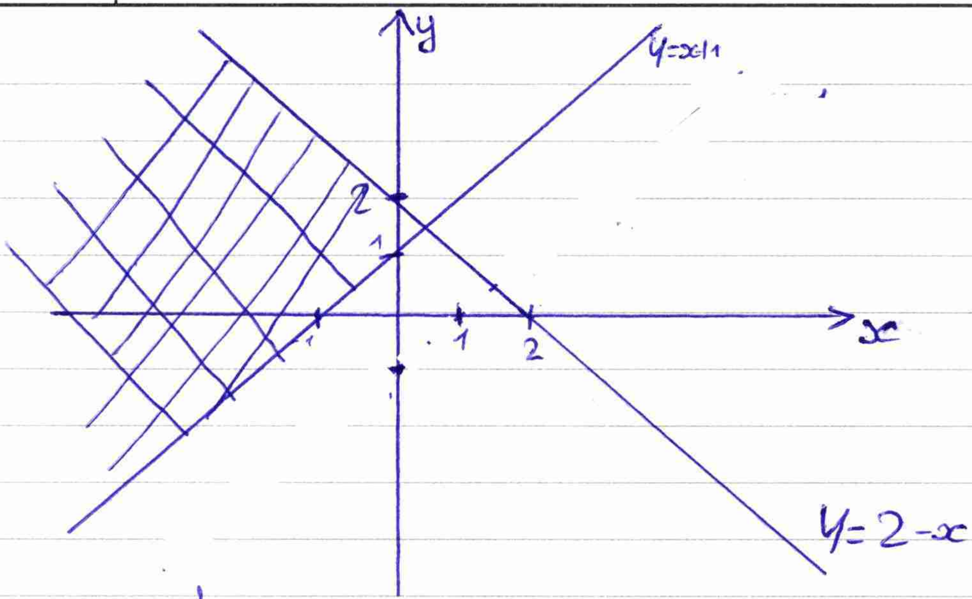
Faisons la représentation graphique dans un repère orthonormé.

Copie anonyme - n°anonymat : 240871

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 16 | Session : 2025

Épreuve de : Maths 2 appro ESCP/HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre



La partie hachurée correspond à $\mathcal{A}$ si $a=2$ et $b=-1$

$\forall y \geq d$

9) a : $(x,y)\in\mathcal{A} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y\leq a \\ x-y\leq b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq a-y \\ x\leq b+y\end{cases}$

Or $a-y\leq b+y \Leftrightarrow a-b\leq 2y \Leftrightarrow d\leq y$ ce qui est vrai

Donc $(x,y)\in\mathcal{A} \Leftrightarrow x\leq a-y \Leftrightarrow x\in\,]-\infty, a-y]$

b : $\int_{-\infty}^{+\infty} 1_A(x,y)\,\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{a-y} 1\cdot\varphi(x)dx + \int_{a-y}^{+\infty} 0\cdot\varphi(x)dx$

car $1_A(x,y)=1 \Leftrightarrow (x,y)\in\mathcal{A} \Leftrightarrow x\leq a-y$

$= \Phi(a-y)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

10) $\forall y \leq d$, $(x,y) \in A \iff \begin{cases} x+y \leq a \\ x-y \leq b \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq a-y \\ x \leq b+y \end{cases}$

Or $b+y \leq a-y$ car $y \leq d$ ie $y \leq \frac{a-b}{2}$

Donc $(x,y) \in A \iff x \leq b+y$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} 1_A(x,y)\, \varphi(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{b+y} 1 \cdot \varphi(x)dx}_{=\Phi(b+y)} + \int_{b+y}^{+\infty} 0\, \varphi(x)dx$

11a) $\mathbb{R}^2$ est un fermé par convention

$\varphi_1 : (x,y) \mapsto x+y \in C^0(\mathbb{R}^2)$ comme fonction polynomiale, idem pour $\varphi_2 : (x,y) \mapsto x-y$. Les inégalités sont larges.

Par le cours, A est un fermé comme intersection de deux fermés

b: $P((X,Y) \in A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} 1_A(x,y) \cdot \varphi(x)dx \right) \varphi(y)dy$

$= \int_{-\infty}^{d} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} 1_A(x,y)\, \varphi(x)dx \right) \varphi(y)dy +$

$\int_{d}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} 1_A(x,y)\, \varphi(x)dx \right) \varphi(y)dy$

$= \int_{-\infty}^{d} \Phi(b+y)\, \varphi(y)dy + \int_{d}^{+\infty} \Phi(a-y)\, \varphi(y)\, dy$ par 9) et 10)

$= (*)$

En faisant le changement de variable $b+y = c-z$ ie $z = c-(b+y)$ dans la première intégrale et $a-y = c-z$ ie $z = c-(a-y)$ dans la deuxième (affines non constants donc licites) on a :

$(*) = \int_{+\infty}^{c-b-d} \Phi(c-z)\, \varphi(c-z-b)(-dz) + \int_{c-(a-d)}^{+\infty} \Phi(c-z)\, \varphi(a-(c-z))(\ dz)$

Avec $c-b-d = \frac{2b}{2} - b = 0$, $c-z-b = d-z$,

$c-a+d = 0$, $a-(c-z) = d+z$, on obtient bien par factorisation :

$$P((X,Y)\in A) = \int_0^{+\infty} (\varphi(d+z) + \varphi(d-z))\, \Phi(c-z)\,dz$$

12) Or $\int_{-\infty}^{c} (\varphi(d+z)+\varphi(d-z))\varphi(t-z)\,dt = (\varphi(d+z)+\varphi(d-z))\int_{-\infty}^{c} \varphi(t-z)\,dt$

$= (\varphi(d+z)+\varphi(d-z)) \int_{-\infty}^{c-z} \varphi(u)\,du = (\varphi(d+z)+\varphi(d-z))\,\Phi(c-z)$ par le changement de variable affine $u = t-z$

En intégrant cette égalité de 0 à $+\infty$ car tout converge par hypothèse on a bien :

$$P((X,Y)\in A) = \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{c} (\varphi(d+z)+\varphi(d-z))\varphi(t-z)\,dt \right) dz$$

13) Soit $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, $\varphi\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)\varphi\left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right)^2}{2}}$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(u+v)^2 - (u-v)^2}{4}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2u^2-2v^2}{4}} = \frac{e^{-\frac{(u^2+v^2)}{2}}}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}}$$

$$= \varphi(u)\varphi(v)$$

14) Par le résultat admis,

$$P((X,Y)\in A) = \int_{-\infty}^{c} \left(\int_0^{+\infty} (\varphi(d+z)\varphi(t-z) + \varphi(d-z)\varphi(t-z))\,dz \right) dt$$

Or $\int_0^{+\infty} \varphi(d+z)\varphi(t-z)\,dz + \int_0^{+\infty}\varphi(d-z)\varphi(t-z)\,dz =$

$\int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{d+z+t-z}{\sqrt{2}}\right)\varphi\left(\frac{d+z-t+z}{\sqrt{2}}\right) dz + \int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{d-z+t-z}{\sqrt{2}}\right)\varphi\left(\frac{d-z-t+z}{\sqrt{2}}\right) dz$ par 13)

$= \varphi\left(\frac{d+t}{\sqrt{2}}\right)\int_0^{+\infty}\varphi\left(\frac{d-t+2z}{\sqrt{2}}\right)dz + \varphi\left(\frac{d-t}{\sqrt{2}}\right)\int_0^{+\infty}\varphi\left(\frac{d+t-2z}{\sqrt{2}}\right)dz$

$= \varphi\left(\frac{d+t}{\sqrt{2}}\right) \int_{\frac{d-t}{\sqrt{2}}}^{+\infty} \varphi(u) \frac{1}{\sqrt{2}} du + \varphi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right) \int_{\frac{d+t}{\sqrt{2}}}^{-\infty} \varphi(u) \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) du$ par les

car φ est paire

changements de variable $u = \frac{d-t+2z}{\sqrt{2}}$ et $u = \frac{d+t-2z}{\sqrt{2}}$ dans les deux intégrales respectivement (affines non constants donc licites)

$= \varphi\left(\frac{d+t}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \Phi\left(\frac{d-t}{\sqrt{2}}\right)\right)\right) + \varphi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi\left(\frac{d+t}{\sqrt{2}}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right)\Phi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right) + \varphi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right)\Phi\left(\frac{d+t}{\sqrt{2}}\right)\right)$

En intégrant de $-\infty$ à c, car tout converge, on a bien :

$P((X,Y) \in \mathcal{A}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{c} \left(\varphi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right)\Phi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right) + \varphi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right)\Phi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right)\right) dt$

Soit $A \le c$

15) $\int_A^c \varphi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right)\Phi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right) dt = \left[\sqrt{2}\,\Phi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right)\Phi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right)\right]_A^c - \int_A^c \sqrt{2}\,\Phi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right) dt$

Par une intégration par parties avec $u(t) = \sqrt{2}\,\Phi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right)$, $v(t) = \Phi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})^2$

$= \sqrt{2}\,\Phi\left(\frac{c+d}{\sqrt{2}}\right)\Phi\left(\frac{c-d}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2}\,\Phi\left(\frac{A+d}{\sqrt{2}}\right)\Phi\left(\frac{A-d}{\sqrt{2}}\right) - \int_A^c \Phi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right)\varphi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right) dt$

Par passage à la limite quand A tend vers $-\infty$ car toutes les quantités convergent, on a

$\int_{-\infty}^c \varphi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right)\Phi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right) dt = \sqrt{2}\,\Phi\left(\frac{c+d}{\sqrt{2}}\right)\Phi\left(\frac{c-d}{\sqrt{2}}\right) - \int_{-\infty}^c \Phi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right)\varphi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right) dt$

Car $\Phi(t) \xrightarrow[t \to -\infty]{} 0$ comme fonction de répartition.

Alors par 14), $P((X,Y)\in\mathcal{A}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\,\Phi\left(\frac{c+d}{\sqrt{2}}\right)\Phi\left(\frac{c-d}{\sqrt{2}}\right) - \int_{-\infty}^c \Phi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right)\varphi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right) dt + \int_{-\infty}^c \varphi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right)\Phi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right) dt\right)$

$= \Phi\left(\frac{c+d}{\sqrt{2}}\right)\Phi\left(\frac{c-d}{\sqrt{2}}\right)$

---

16) Dès lors $P((X,Y)\in\mathcal{A}) = P(X+Y \le a \cap X-Y \le b)$

$= P\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}} \le \frac{a}{\sqrt{2}} \cap \frac{X-Y}{\sqrt{2}} \le \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$

$= \Phi\left(\frac{c+d}{\sqrt{2}}\right)\Phi\left(\frac{c-d}{\sqrt{2}}\right)$

Copie anonyme - n°anonymat : 240871

Code épreuve : 283	Nombre de pages : 16	Session : 2025

Épreuve de : Maths 2 appro ESCP/HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$= \Phi\left(\frac{a}{\sqrt2}\right)\Phi\left(\frac{b}{\sqrt2}\right)$ car $\frac{c+d}{\sqrt2} = \frac{\frac{2a}{2}}{\sqrt2}$ et $\frac{c-d}{\sqrt2} = \frac{\frac{2b}{2}}{\sqrt2}$

Donc $P\left(\frac{X+Y}{\sqrt2} \leq \frac{a}{\sqrt2} \cap \frac{X-Y}{\sqrt2} \leq \frac{b}{\sqrt2}\right) = \Phi\left(\frac{a}{\sqrt2}\right)\Phi\left(\frac{b}{\sqrt2}\right)$, pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

Cela signifie bien que $\frac{X+Y}{\sqrt2}$ et $\frac{X-Y}{\sqrt2}$ sont indépendantes et suivent la loi normale centrée réduite. Le théorème est démontré.

(on remarque que $X+Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0,2)$ donc $\frac{X+Y}{\sqrt2} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ par propriété de la loi normale)

Troisième partie :

17) a : D'après l'écriture des coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée,

$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, a_k\rangle a_k$ ie $x - \langle x, a_1\rangle a_1 = \sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k\rangle a_k$

ie $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sqrt{n}^2}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k\rangle a_k$

ie $\sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k\rangle a_k = \left(x_1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, x_2 - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \dots x_n - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)$

$= (x_1 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x})$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b : On pose $y = (x_1 - \bar{x}, \dots x_n - \bar{x})$

$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ par la norme canonique écrite dans une base orthonormée

$\| \sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k \rangle a_k \|^2 = \langle \sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k \rangle a_k, \sum_{i=2}^{n} \langle x, a_i \rangle a_i \rangle$

$= \sum_{i=2}^{n} \sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k \rangle \langle x, a_i \rangle \langle a_k, a_i \rangle$ par bilinéarité du produit scalaire

$= \sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k \rangle^2$ car $\langle a_k, a_i \rangle = 0 \Leftrightarrow k \neq i$ puisque $(a_1 - a_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Alors $\sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k \rangle^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$

18a : Pour $a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ dans $\mathbb{R}^2$, $Y_1 = \langle X, a_1 \rangle = \frac{X_1 \cdot 1 + X_2 \cdot 1}{\sqrt{2}}$

avec $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et X_1, X_2 indépendantes

Par le théorème de COCHRAN $Y_1 = \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

b : Si R_1 et R_2 sont indépendantes, $cov(R_1, R_2) = 0$ par le cours

~~Si $cov(R_1, R_2) = 0$, alors $E(R_1 R_2) = E(R_1) E(R_2)$~~

~~ie $B_1 E(X_1^2) + (B_1 + B_2) E(X_1 X_2) + B_2 E(X_2^2) = E$~~

19) a : $\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,n)$ par stabilité de la loi normale par la somme et car les X_i sont mutuellement indépendantes.

Par propriété de la loi normale $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{n}{n^2})$ ie $\mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$

b : $\overline{X} = \frac{\langle X, a_1 \rangle}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot 1 = \frac{Y_1}{\sqrt{n}}$

$U = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 = \sum_{k=2}^{n} \langle X, a_k \rangle^2$ par 17b)

$= \sum_{k=2}^{n} Y_k^2$

c : Par le théorème de Cochran, les $Y_{i\,i \in [\![1,n]\!]}$ sont mutuellement indépendantes.
Donc Y_1 est indépendante des $Y_k^2{}_{k \in [\![2,n]\!]}$ par le lemme des coalitions.

Alors Y_1 est indépendante de U par le lemme des coalitions. Donc $\overline{X}$ et U sont indépendantes

$\forall k \in [\![2,n]\!]$, $Y_k \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ par le théorème de Cochran et sont mutuellement indépendantes

Donc $S_n = \sum_{i=2}^{n} Y_k^2 \hookrightarrow \chi^2(n-1)$ par la première partie

Alors $U \hookrightarrow \chi^2(n-1)$

20) a : $V = \sum_{i=1}^{n} (Z_i - \overline{Z})^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sigma X_i + \mu - \frac{\sum_{j=1}^{n} \sigma X_j + \mu}{n}\right)^2$

$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sigma X_i + \mu - \sigma \overline{X} - \frac{n\mu}{n}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\sigma (X_i - \overline{X}))^2 = \sigma^2 U$

b : $\frac{1}{n-1} V$ est un estimateur de σ^2 car $\frac{1}{n-1}(V) = \varphi(Z_1 \dots Z_n)$ où $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(z_1 \dots z_n) \mapsto \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(z_i - \frac{\sum_{j=1}^{n} z_j}{n}\right)^2}{n-1}$

où $(Z_1 \dots Z_n)$ est un n-échantillon indépendant identiquement distribué de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et où Y est indépendante de σ^2.

$$E\left(\frac{1}{n-1} V\right) = \frac{1}{n-1} \sigma^2 E(U) \quad \text{par linéarité de l'espérance}$$

$$= \frac{1}{n-1} \sigma^2 (n-1) \quad \text{car } U \hookrightarrow \chi^2(n-1) \text{ par 1)}$$

$$= \sigma^2$$

<u>Donc $\frac{1}{n-1}$ V est un estimateur sans biais de σ^2</u>

c: $\sum_{i=1}^{n} Z_i \hookrightarrow \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$ par stabilité par la somme de la loi normale. Donc $\overline{Z} \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, donc $\overline{Z} - \mu \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{n})$

~~Alors~~ $\cancel{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{Z} - \mu) \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)}$

21) En admettant que la convergence en probabilité implique la convergence en loi.

$$\frac{\overline{Z} - \mu}{\sqrt{\frac{V}{n(n-1)}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1) \text{ par 7)}$$

Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(-\varepsilon \leq \frac{\overline{Z} - \mu}{\sqrt{\frac{V}{n(n-1)}}} \leq \varepsilon\right) = 2\Phi(\varepsilon) - 1$

On cherche