Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 19 | Session : 2025

Épreuve de : Maths appro EDHEC

Z5-00090
240871
Mat Appro

Consignes
• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
• Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1 :

1)a : $g \in C^1(\mathbb{R}_+^*)$ comme quotient bien défini de fonctions C^1.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x)}{x^2} = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$

Or $x^2 > 0$, $1-\ln(x) \geq 0 \iff 1 \geq \ln(x)$
$\iff e \geq x$ par croissance de $t \mapsto e^t$.

On en déduit le tableau de variations de g suivant :

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$

$g(e) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ par croissance comparée

b : $2 < e < 3$ et $\forall x \geq e$, $\dfrac{\ln(x)}{x} \leq \dfrac{\ln(e)}{e}$

La fonction g est décroissante sur $[3, +\infty[$. Donc $\left(\dfrac{\ln(k)}{k}\right)_{k \geq 3}$ est décroissante

$\forall k \geq 4$, $\dfrac{\ln(k)}{k} \leq \dfrac{\ln(4)}{4} = \dfrac{2\ln(2)}{2 \cdot 2} = \dfrac{\ln(2)}{2}$

Donc $\forall k \geq 4$, $\dfrac{\ln(k)}{k} \leq \dfrac{\ln(2)}{2}$

2)a : f_n est dérivable sur $]n,+\infty[$ comme somme et produits de fonctions dérivables bien définies $\left(\begin{array}{l} x-n>0 \\ n\geq 1 \end{array}\right)$.

$$\forall x \in]n,+\infty[,\ f_n'(x) = \ln(x) + \frac{x-n}{x} - \left(\ln(x-n) + \frac{x}{x-n}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{x}{x-n}\right) + \frac{x-n}{n} - \frac{x}{x-n}$$

b : Soit $t>0$, $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, autrement dit sa courbe représentative est sous ses tangentes.

Or l'équation de la tangente à la courbe représentative de $\ln$ en 1 est :

$y = \frac{1}{1}(t-1) + \ln(1)$ puisque la dérivée de $\ln$ est $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
$= t-1$

Donc, $\forall t>0,\ \ln(t) \leq t-1$

$\forall x > n \geq 1,\ \frac{x}{x-n} > 0$ et par le résultat précédent, $\ln\left(\frac{x}{x-n}\right) \leq \frac{x}{x-n} - 1$

Donc $\forall x > n,\ f_n'(x) \leq \frac{x}{x-n} - 1 + \frac{x-n}{n} - \frac{x}{x-n}$
$$\leq \frac{x-n}{n} - 1$$
$$\leq \ldots$$

Il faut que l'on montre que $\forall x > n,\ \ f_n'(x) < 0$.

c : Soit $n \geq 2$, f_n est continue et strictement décroissante sur $]n,+\infty[$

à valeurs dans ~~$]-\infty,+\infty[$~~ un intervalle $J \subset \mathbb{R}$. ~~$\left(\text{car} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln(x)}{(x-n)}\right) - n\ln(x) = -\infty\right.$ et $\left.\lim_{x\to n} f_n(x) = \lim_{x\to} -x\ln(x-n) = +\infty\right)$~~

Par le théorème de la bijection monotone, f_n est bijective sur $]n,+\infty[$ à valeurs dans J.

$f_n(n+1) = \underset{(n+1-n)}{\ln}(n+1) - (n+1)\ln(n+1-n) = \ln(n+1) \geq 0$ car $n \geq 2$

$f_n(n+2) = (n+2-n)\ln(n+2) - (n+2)\ln(n+2-n)$
$= 2\ln(n+2) - (n+2)\ln(2)$

Or $\forall n \geq 2$, $n+2 \geq 4$ et par 1b) $\dfrac{\ln(n+2)}{n+2} \leq \dfrac{\ln(2)}{2}$ ie

$2\ln(n+2) \leq (n+2)\ln(2)$ ie $f_n(n+2) \leq 0$. $0 \in [f_n(n+2), f_n(n+1)]$

Donc $\exists!\, x_n \in [n+1, n+2]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

3) On a : $n+1 \leq x_n \leq n+2$ ie $\dfrac{n+1}{n} \leq \dfrac{x_n}{n} \leq \dfrac{n+2}{n}$

ie $1 + \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{x_n}{n} \leq 1 + \dfrac{2}{n}$

Par passage à la limite dans l'inégalité, on obtient par encadrement

que $\dfrac{x_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ ie $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$

4)a : $\forall n \geq 2$, $f_n(x_n) = 0$ ie $(x_n - n)\ln(x_n) - x_n\ln(x_n - n) = 0$
ie $(x_n - n)\ln(x_n) = x_n \ln(x_n - n)$
ie $\ln(x-n) = (x_n - n)\dfrac{\ln(x_n)}{x_n}$

car $x_n \neq 0$ ($x_n \geq n+1 \geq 3$)

b : $\forall n \geq e$, on a $n+1 \leq x_n \leq n+2$ ie $g(n+1) \geq g(x_n) \geq g(n+2)$

car g est décroissante sur $[e,+\infty[$, ie $\dfrac{\ln(n+1)}{n+1} \geq \dfrac{\ln(x_n)}{x_n} \geq \dfrac{\ln(n+2)}{n+2}$.

Or $\forall t \geq e$ $\dfrac{\ln(t)}{t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ par croissance comparée.

Donc par encadrement $\underline{\dfrac{\ln(x_n)}{x_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$.

$\forall n \geq 2$,
$1 \leq x_n - n \leq 2$

5)a : $\forall n \geq 2$, $u_n = (x_n - n) - 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ car $(x_n - n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

Donc par le cours $\underline{\ln(1+u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n}$

$1+n+u_n = x_n \underset{+\infty}{\sim} n$ par 3).

Donc $\ln(1+n+u_n) = \ln(x_n)$.

Or $\dfrac{x_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ donc $\ln\left(\dfrac{x_n}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln(1) = 0$ par composition des limites,

ie $\ln(x_n) - \ln(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

b : En remplaçant les éléments de la question 4a, on obtient $\forall n \geq 2$:

$\ln(1+u_n) = (n+1)\dfrac{\ln(1+n+u_n)}{x_n}$. Par passage aux équivalents on a :

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 240871

Emplacement QR Code

Code épreuve : 297 **Nombre de pages :** 19 **Session :** 2025

Épreuve de : Maths appro EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$U_n \underset{+\infty}{\sim} (x_n+1)\dfrac{\ln(n)}{n}$ d'après 5a)

ie $\dfrac{U_n}{\frac{\ln(n)}{n}} \underset{+\infty}{\sim} x_n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ car $x_n - n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Donc $\underline{U_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}}$

g est décroissante sur $[3,+\infty[$, $\forall t \geqslant k$ fixé $\geqslant 3$, on a :

$\dfrac{\ln(k)}{k} \geqslant \dfrac{\ln(t)}{t}$ donc $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\ln(k)}{k}\,dt \geqslant \int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t}\,dt$ par croissance de l'intég

$\displaystyle\geqslant \left[\ln^2(t)\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1}\frac{\ln(t)}{t}\,dt$

Par une intégration par parties avec $u(t) = \ln(t)$ et $v(t) = \ln(t)$ $\mathcal{C}^1([k,k+1])$

$\geqslant \dfrac{\ln^2(k+1) - \ln^2(k)}{2}$

Donc $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n} \ln^2(k+1) - \ln^2(k)$

$\geqslant \dfrac{1}{2}\left(\ln^2(n+1) - \ln^2(3)\right)$ par télescopage.

Donc par théorème d'encadrement, comme $\ln^2(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
on a que $\displaystyle\sum_{k\geqslant 3} \frac{\ln(k)}{k}$ diverge. Donc par comparaison et positivité

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

car $u_n = x_n - (n+1) \geqslant 0$ $(x_n \geqslant n+1)$, on a $\sum_{n\geqslant 3} u_n$ diverge

En outre $u_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{n^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ car $\frac{\ln^2(n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

par croissance comparée

Or $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge par le critère de Riemann car $\frac{3}{2} > 1$, donc par comparaison et positivité, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln^2(n)}{n^2}$ converge puis $\sum_{n\geqslant 1} u_n^2$ converge

Exercice 3 :

1) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$. De plus $f \in C^0(\mathbb{R}_-)$ par produit de fonctions continues et $f \in C^0(\mathbb{R}_+^*)$ comme constante. Donc par prolongement par continuité, $f \in C^0(\mathbb{R})$

$\forall x \in \mathbb{R}_-$, $-2x \geqslant 0$, $e^{-x^2} \geqslant 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = 0 \geqslant 0$

donc $f(x) \geqslant 0$

Donc f est positive sur $\mathbb{R}$.

$\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 0. $\int_{-\infty}^0 f(t)dt = \int_{-\infty}^0 -2te^{-t^2}dt$ converge et vaut :

$e^0 - \lim_{A\to-\infty} e^{-A^2}$

$= 1 - 0$

$= 1$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1 par la relation de Chasles.

Par caractérisation, f peut être considérée comme une densité

2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ $F(x) = 1$ car $X(\Omega) =]-\infty, 0]$.

Soit $x \in \mathbb{R}_-$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} -2te^{-t^2} dt = e^{-x^2} - \lim\limits_{A \to -\infty} e^{-A^2}$
$= e^{-x^2}$

Donc $F(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

3) La loi normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$ admet pour densité sur $\mathbb{R}$ la fonction

$j : x \mapsto \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-0)^2}{2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$

4) X admet une espérance $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ converge absolument

$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} -2t^2 e^{-t^2} dt$ converge absolument car f est nulle sur $\mathbb{R}_+$.

Or pour $B < 0$, $\int_B^0 tf(t) dt = \left[tF(t)\right]_B^0 - \int_B^0 F(t) dt$

par une intégration par parties avec $u(t) = t$ et $v(t) = F(t) \in C^1(\mathbb{R})$ (car $f \in C(\mathbb{R})$)

$= -Be^{-B^2} - \int_B^0 e^{-t^2} dt$.

Par passage à la limite quand B tend vers $-\infty$, possible car $\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2} dt$ est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$ à une constante près, évaluée en 0, on a :

$\int_{-\infty}^{0} tf(t) dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2} dt$ car $-Be^{-B^2} \xrightarrow[B \to -\infty]{} 0$ par croissance comparée.

$= -\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx\right)$ car $t \mapsto e^{-t^2}$ est paire

$= -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ car $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} dt = 1$ comme densité par 3).

Donc $E(X)$ existe et vaut $-\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

5) $Z(\Omega) = [0, +\infty[$ car $X(\Omega) =]-\infty, 0]$

$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, G(x) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, G(x) = P(Z \leq x) = P(X^2 \leq x) = P(|X| \leq \sqrt{x})$
$= P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x})$
$= F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})$
car $\sqrt{x} \geq 0$ et $-\sqrt{x} \leq 0$, par 2) $\leftarrow$ $= 1 - e^{-(-\sqrt{x})^2}$
$= 1 - e^{-x}$

On reconnait la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(1)$. Donc $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

6) Z admet une espérance qui vaut 1. Donc $E(X^2) = 1$.

X admet un moment d'ordre 2, donc X admet une variance qui vaut

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ par la formule de Koenig-Huygens
$= 1 - \left(\frac{-\sqrt{\pi}}{2}\right)^2$
$= 1 - \frac{\pi}{4}$
$= \frac{3\pi}{4}$

7)
```
def simulX(n):
    M = np.zeros(n)
    for i in range(n)
        M[i] = (-1)* np.sqrt(rd.exponential(1))
    return(M)
```

En effet $X^2 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ donc si x est la valeur prise par X^2, alors $|X| = \sqrt{x}$, or

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 240871

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 19	Session : 2025
Épreuve de : Maths appro EDHEC		

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$|X| = -X$ car X est à valeurs dans $\mathbb{R}_-$, donc $X = -\sqrt{x}$.

```
def Esperance X(n):
    S = np.sum(simulX(n))      # on somme les n valeurs prises par X
    return (S/n)               # on renvoie la moyenne de cette somme
```

Pour n assez grand, on obtient une valeur approchée de $E(X)$

Partie 2 :

8) $h \in C^0(\mathbb{R}_-)$, $h \in C^0(]1,+\infty[)$ comme fonction constante.
$h \in C^0(]0,1[)$ comme fonction polynomiale. Donc $h \in C^0(\mathbb{R} \setminus \{0,1\})$.
h est nulle sur $\mathbb{R}_-$ et sur $]1,+\infty[$, h est positive sur $[0,1]$ car $(1-x) \geq 0$
$\int_{-\infty}^{0} h(t)dt$ converge et vaut 0, idem pour $\int_1^{+\infty} h(t)\,dt$
$\int_0^1 2(1-t)dt$ converge et vaut $2\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2\left(1-\frac{1}{2}-(0-0)\right) = 1$
Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt$ converge et vaut 1, par la relation de Chasles.
Ainsi par caractérisation, h peut être considérée comme une densité.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

9) $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $H(x)=0$ et $\forall x>1$, $H(x)=1$ car $Y(\Omega)=[0,1]$

$\forall x\in[0,1]$, $H(x)=\int_{-\infty}^{x} h(t)dt = \int_0^x 2(1-t)dt$

$= 2\left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^x = 2\left(x-\frac{x^2}{2}\right) = 2x-x^2$

Donc $H(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 2x-x^2 & \text{si } x\in[0,1] \\ 1 & \text{si } x>1 \end{cases}$

10) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, soit $x\in\mathbb{R}$,

$P(T_n\leq x) = P(\sqrt{n}(M_n-1)\leq x) = P(M_n \leq \frac{x}{\sqrt{n}}+1)$

$= P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\left[Y_i\leq \frac{x}{\sqrt{n}}+1\right]\right)$ car $M_n=\max\{Y_1 - Y_n\}$

$=\prod_{i=1}^{n} P(Y_i\leq \frac{x}{\sqrt{n}}+1)$ par indépendance mutuelle des Y_i.

$= P(Y\leq \frac{x}{\sqrt{n}}+1)^n$ car les Y_i suivent la même loi que Y

$=\left(H\left(\frac{x}{\sqrt{n}}+1\right)\right)^n$

11) $\forall y\in\mathbb{R}$, $\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = e^{n\ln(1+\frac{y}{n})}$. Or $1+\frac{y}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, donc

$\ln\left(1+\frac{y}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{y}{n}$ ie $n\ln(1+\frac{y}{n}) \underset{+\infty}{\sim} y$ donc $n\ln(1+\frac{y}{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$

Par composition, $e^{n\ln(1+\frac{y}{n})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^y$. Donc $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = e^y$

12) Or, $F_n(x) = \left(H\left(\frac{x}{\sqrt{n}}+1\right)\right)^n = \begin{cases} 0 \text{ si } \frac{x}{\sqrt{n}}+1<0 \\ \left(2\left(\frac{x}{\sqrt{n}}+1\right)-\left(\frac{x}{\sqrt{n}}+1\right)^2\right)^n \text{ si } \frac{x}{\sqrt{n}}+1\in[0,1] \\ 1 \text{ si } \frac{x}{\sqrt{n}}+1>1 \end{cases}$

$$= \begin{cases} 0 \text{ si } x < -\sqrt{n} \\ \quad , \text{ si } x \in [-\sqrt{n}, 0] \longleftarrow \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \text{ en développant} \\ 1 \quad \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Or, lorsque n tend vers $+\infty$, $-\sqrt{n}$ tend vers $-\infty$.

Donc pour $x \in]-\infty, 0]$, $F_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-x^2}$ par la question précédente.
$= P(X \leq x)$ si $x \leq 0$

Pour $x > 0$, $F_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 = P(X \leq x)$ si $x > 0$

Donc on remarque que $\underline{T_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X}$.

Problème : Partie 1

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+n}{4k} = \frac{\prod_{k=1}^{n} k+n}{\prod_{k=1}^{n} 4k} = \frac{\prod_{k=1}^{n} (k+n)}{4^n n!} = \frac{\frac{(2n)!}{n!}}{4^n n!}$

$= \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} \underline{= B_n}$.

```
def B(n):
    P=1
    for k in range(1,n+1):
        P=P*((k+n)/4*k)
    return P
```

Partie 2 :

2) $W_0 = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^0 dt = \int_0^{\pi/2} 1 dt = \underline{\frac{\pi}{2}}$

$W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t) dt = -\cos(\frac{\pi}{2}) - (-\cos(0)) = \underline{1}$

3) $\forall n \geq 0$, $W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^{n+1} dt - \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n (\sin(t) - 1) dt$$

Or, $\sin(t)^n \geq 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $-1+\sin(t) \leq 0$ car $|\sin(t)| \leq 1$

Donc par "négativité" de l'intégrale avec bornes dans le bon sens, comme l'intégrande est négative, $W_{n+1} - W_n \leq 0$

Autrement dit <u>(W_n) est décroissante</u>

4) $W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^{n+2} dt = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^{n+1} \sin(t) dt$

$= \left[\sin(t)^{n+1}(-\cos t)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n+1)\cos(t)\sin(t)^n \cos(t) dt$ en réalisant une intégration par parties avec $u(t) = \sin(t)^{n+1}$ et $v(t) = -\cos(t)$, $(u,v) \in (C^1(\mathbb{R}))^2$.

$$= (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) \sin(t)^n dt$$

$$= (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(t)) \sin(t)^n dt$$

$$= (n+1) \left(\int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt - \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}(t) dt \right)$$

On a donc $W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2})$ ie $(n+2) W_{n+2} = (n+1) W_n$

ie $\underline{W_{n+2} = \frac{(n+1)}{(n+2)} W_n}$

5) Raisonnons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$. Soit P_n : " $W_{2n} = \frac{\pi}{2} B_n$ et $W_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1) B_n}$ "

Initialisation $(n=0)$: $W_0 = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} B_0$ car $B_0 = \frac{1}{4^0} \binom{0}{0} = 1$.

$W_1 = 1 = \frac{1}{(2 \cdot 0+1) B_0}$

P_0 et P_1 sont vraies.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751

Emplacement QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 19

Session : 2025

Épreuve de : Maths appro EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

On suppose P_n vraies pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, montrons que P_{2n+3} et P_{2n+2} sont vraies et P_{2n+1}

$$W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n} \text{ par 4)}$$

$$= \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{\pi}{2} B_n \text{ par hypothèse de récurrence}$$

$$\cancel{= \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k+n}{4k}\right) \cdot \frac{2n+1}{2n+2}}$$

$$\cancel{= \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{k+n}{4k} \cdot \frac{n+1+n}{4(n+1)}}$$

$$= \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$$

$$= \frac{1}{4^{n+1}} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 4 \cdot \frac{(2n+1)}{(2n+2)} \frac{2n!}{n!\,n!}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4^{n+1}} \cdot \frac{4}{2} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,n!} \cdot \frac{1}{(2n+2)}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4^{n+1}} \binom{2n+2}{n+1}$$

$$= \frac{\pi}{2} B_{n+1} \qquad P_{2n+2} \text{ est vraie}$$

$$W_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3} W_{2n+1} \text{ par 4)}$$

$$= \frac{2n+2}{2n+3} \cdot \frac{1}{(2n+1) B_n} \text{ par hypothèse de récurrence.}$$

$$= \frac{2n+2}{2n+3} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{4^n n!\,n!}{(2n)!} = \frac{4^{n+1}(n+1) n!\,n!}{(2n+3)(2n+1)! \cdot 2} = \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{4^{n+1}(n+1)!(n+1)!}{2 \cdot (2n+1)!(n+1)}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$= 4^{n+1} \cdot \dfrac{1}{\binom{2n+1}{n+1}} \cdot \dfrac{1}{2n+3}$ $\quad P_{2n+3}$ est vraie

$\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie

7) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $W_{2n+1} \leq W_{2n} \leq W_{2n-1}$ car (W_n) est décroissante

ie $\dfrac{1}{(2n+1)B_n} \leq \dfrac{\pi}{2} B_n \leq \dfrac{1}{2n B_n}$

ie $\dfrac{2}{(2n+1)\pi B_n} \leq B_n \leq \dfrac{1}{n\pi B_n}$

ie $\dfrac{2}{(2n+1)\pi} \leq B_n^2 \leq \dfrac{1}{n\pi}$

donc $\dfrac{2}{(2n+2)\pi} \leq B_n^2 \leq \dfrac{1}{n\pi}$ car $\dfrac{1}{2n+2} \leq \dfrac{1}{2n+1}$

ie $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{\pi}} \leq B_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{\pi}}$ car B_n est positive.

8) Alors on a : $\sqrt{\dfrac{n}{n+1}} \leq \sqrt{\pi n}\, B_n \leq 1$

Or $\sqrt{\dfrac{n}{n+1}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{n}{n}} = 1$, donc par encadrement $B_n \cdot \sqrt{\pi n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

ie $B_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$

Partie 3 : $X_n(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \dfrac{1}{2}$ car $P(X_n = 1) + P(X_n = -1) = 1$.

9) a : Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

$Y_k(\Omega) = \left\{\frac{-1+1}{2}, \frac{1+1}{2}\right\} = \{0,1\}$

$P(Y_k = 1) = P\left(\frac{X_k+1}{2} = 1\right) = P(X_k = 1) = \frac{1}{2}$. Donc $\underline{Y_k \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})}$

Alors, $\underline{E(Y_k) = \frac{1}{2},\ V(Y_k) = \frac{1}{4}}$.

b : $T_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} X_k = \underline{\sum_{k=1}^{n} Y_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})}$ puisque les Y_k sont mutuellement indépendantes par le lemme des coalitions.

c : Parmi les n X_k, si $\underset{\in [\![0,n]\!]}{j}$ valent 1 et $n-j$ valent -1, on a $S_n = j \cdot 1 + (n-j)(-1) = 2j-n$. Donc $\underline{S_n(\Omega) = \{2j-n,\ j \in [\![0,n]\!]\}}$

$\forall k \in S_n(\Omega)$, $P(S_n = k) = P(2T_n - n = k)$ car $T_n = \frac{n+S_n}{2}$

$$= P\left(T_n = \frac{n+k}{2}\right)$$

$$= \binom{n}{\frac{k+n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-\frac{k+n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k+n}{2}}$$

$$= \binom{n}{\frac{k+n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

2a : $R_n = \text{card}\{k \in [\![1,2n]\!], S_k = 0\}$
$= \text{card}\{2i \in [\![1,2n]\!]\ \ S_{2i} = 0\}$
$= \underline{\text{card}\{i \in [\![1,n]\!], S_{2i} = 0\}}$

b : D'après la question précédente, $P(S_{2k} = 0) = \binom{2k}{\frac{0+2k}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$

$$= \binom{2k}{k} \frac{1}{4^k}$$

$$= \underline{B_k}$$

c : $R_n = \sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}$ car $1_{A_k} = 1$ si $S_{2k} = 0$ et R_n compte le nombre de k tels que $S_{2k} = 0$.
$\in [\![1,n]\!]$

d : Alors $E(R_n) = E\left(\sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} E(1_{A_k})$ par linéarité de l'espérance

$= \sum_{k=1}^{n} P(1_{A_k} = 1)$ car $1_{A_k} \hookrightarrow \mathcal{B}(P(1_{A_k}=1))$

$= \sum_{k=1}^{n} P(S_{2k} = 0)$

$= \sum_{k=1}^{n} B_k$ par 1(0a)

12) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, par 7), $\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k+1}} \leq B_k \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k}}$

Donc $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq E(R_n) \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ par somme

Donc $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{i}} \leq E(R_n) \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 2 \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$ par l'inégalité 11) de droite

Donc $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 2 \sum_{i=2}^{n+1} \sqrt{i+1} - \sqrt{i} \leq E(R_n) \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n}$ par l'inégalité 11) de gauche et par télescopage.

ie $\frac{2}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{n+2} - \sqrt{2}) \leq E(R_n) \leq \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$ par télescopage

ie $\frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{2}}{\sqrt{n}} \leq \frac{E(R_n)}{\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}} \leq 1$

Or $\sqrt{\frac{n+2}{n}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ donc par encadrement, $\frac{E(R_n)}{\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

ie $E(R_n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 240871

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 19	Session : 2025

Épreuve de : Maths appro EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Partie 4 :

13a : Par 7, $B_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ ie $\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$

ie $\frac{1}{\binom{2n}{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n}$

b : Alors $\forall x \in [0,4[$, $\frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{x}{4}\right)^n \sqrt{\pi n} \underset{+\infty}{=} o\left(\left(\frac{x}{4}\right)^n \sqrt{\pi}\, n\right)$

Avec $\sum_{n\geq 1} n\left(\frac{x}{4}\right)^{n-1}$ qui converge comme série géométrique dérivée d'ordre 1) car $\left|\frac{x}{4}\right| < 1$ $(\underset{0\leq x}{\ldots} < 4)$. Donc $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{x}{4}\right)^{n-1} n \cdot \frac{x}{4}\sqrt{\pi}$ converge

Donc par comparaison (o) et positivité, $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{x}{4}\right)^n \sqrt{\pi n}$ converge, puis $(\sim)$

$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ converge

14) Soit $(x,y) \in [0,4[^2$, $x \leq y$.

Alors $\frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \frac{y^n}{\binom{2n}{n}}$ par croissance de $t \mapsto t^n$ et car $\binom{2n}{n} \geq 0$

Donc pour $N \geq 1$, $\sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{y^n}{\binom{2n}{n}}$, puis par passage à la limite car les séries convergent :
$f(x) \leq f(y)$.

f est croissante sur $[0,4[$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

15) b : En sommant l'inégalité de la 15a de 1 à $N \geq 1$, on a :

$$\sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{x}{4}\right)^n \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{N} (n+1) \left(\frac{x}{4}\right)^n$$

ie $\sqrt{\pi}\left(\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{x}{4}\right)^n - 1\right) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sqrt{\pi}\left(\frac{x}{4}\sum_{n=1}^{N} n \left(\frac{x}{4}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{x}{4}\right)^n\right)$

Puis par passage à la limite quand N tend vers $+\infty$ car les séries convergent (comme séries géométriques (dérivées)) ; on a :

$$\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{4}} - 1\right) \leq f(x) \leq \sqrt{\pi}\left(\frac{x}{4}\frac{1}{\left(1-\frac{x}{4}\right)^2} + \left(\frac{1}{1-\frac{x}{4}} - 1\right)\right)$$

ie $\sqrt{\pi}\left(\frac{4}{4-x} - \frac{4-x}{4-x}\right) \leq f(x) \leq \sqrt{\pi}\left(\frac{x}{4}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{x}{4}\right)^2} + \frac{4-(4-x)}{4-x}\right)$

ie $\sqrt{\pi}\,\frac{x}{4-x} \leq f(x) \leq \sqrt{\pi}\left(\frac{x}{4}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{x}{4}\right)^2} + \frac{x}{4-x}\right)$

Par encadrement $f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$.

Par minoration, comme $\lim_{x \to 4^-} \sqrt{\pi}\,\frac{x}{4-x} = +\infty$, on a que $\lim_{x \to 4^-} f(x) = +\infty$

$f \in C^0\,]0,4[$ par hypothèse, $f(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{0^n}{\binom{2n}{n}} = 0$. Donc f est prolongeable par continuité en 0^+

Exercice 2 :

1)b : $\forall x \in E$, $x = p(x) + x - p(x)$ avec $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^{\perp}$

Donc $\|x\|^2 = \|p(x) + x - p(x)\|^2$
$= \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2$ par le théorème de Pythagore

a : Soit $x \in F$, $p(x) = x$, donc $\|x\| = \|p(x)\|$ car p est le projecteur orthogonal sur F.

Ainsi $F \subset \{x \in E, \|x\| = \|p(x)\|\}$.

c : Soit $x \in E$, tel que $\|p(x)\| = \|x\|$, alors $\|p(x)\|^2 = \|x\|^2$.

Donc $\|x - p(x)\|^2 = 0$ par 1b) ie $x - p(x) = 0$
ie $x = p(x)$
ie $x \in F$.

Donc par double inclusion, $F = \{x \in E, \|x\| = \|p(x)\|\}$

$\forall x \in E$, $\|x - p(x)\|^2 \geqslant 0$ donc par 1b) $\|x\|^2 \geqslant \|p(x)\|^2$

donc $\|x\| \geqslant \|p(x)\|$

2c : On en déduit que $F_1 \cap F_2 = F_3$ par double inclusion

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751