CONCOURS D'ADMISSION 2026

prépas ECG/ECT

3

Mathématiques Technologiques

Série Technologique

Mardi 14 avril 2026 de 8h00 à 12h00
Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :
8h00 – 13h20

L'énoncé comporte 6 pages.

INSTRUCTIONS

Tous les feuillets doivent être identifiables et numérotés par le candidat.

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé. La règle graduée est autorisée.

Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communicants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à fournir des raisonnements clairs, précis et concis. Le soin apporté à l'ensemble de la copie et la lisibilité entrent pour une bonne part dans l'évaluation de la copie. Le jury tiendra compte de la qualité rédactionnelle et de la maîtrise orthographique dans le barème de l'épreuve.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce document est la propriété d'ECRICOME, le candidat est autorisé à le conserver à l'issue de l'épreuve.

Tournez la page s.v.p.

Exercice 1

Partie 1

Dans cette partie, on considère deux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ définies par $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+1} = \frac{7}{10}a_n + \frac{1}{10}b_n \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \frac{3}{10}a_n + \frac{9}{10}b_n.$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_n + b_n = 1$.
   Indication : On pourra utiliser un raisonnement par récurrence.
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \frac{3}{5}a_n + \frac{1}{10}$.
   (b) Déterminer le réel ℓ tel que $\ell = \frac{3}{5}\ell + \frac{1}{10}$.
   (c) Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = a_n - \ell$.
   Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique.
   (d) Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{3}{5}\right)^n$.
3. (a) Déterminer l'expression de b_n, pour tout entier naturel n.
   (b) Déterminer la limite de $(b_n)_{n\geqslant 0}$.
4. Recopier et compléter la fonction en langage `Python`, nommée `rang`, qui prend en entrée un réel s de $\left]0, \frac{3}{4}\right[$ et renvoie le plus petit entier n tel que $b_n \geqslant s$.

```python
def rang(s):
    b = 0
    n = 0
    while .... :
       n = n + 1
       b = ....
    return n
```

Partie 2

Dans cette partie, M, P, Q et D sont les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -9 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

5. (a) Calculer QP.
   (b) Justifier que P est inversible et donner P^{-1}.
6. (a) Montrer que les vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de M et préciser les valeurs propres associées.
   (b) Montrer que $M = PDP^{-1}$.

7. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $M^n = \dfrac{1}{12} P D^n Q$.

   (b) Déterminer $Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 5^n + 3^n \\ 5^n - 3^n \\ 2 \,.\, 5^n \end{pmatrix}$.

8. On considère maintenant les deux suites $(x_n)_{n \geqslant 0}$ et $(y_n)_{n \geqslant 0}$ définies par $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} = \frac{7}{10} x_n + \frac{1}{10} y_n + \frac{1}{10} \qquad \text{et} \qquad y_{n+1} = \frac{3}{10} x_n + \frac{9}{10} y_n - \frac{1}{10}.$$

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{10} M \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{10^n} M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $x_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{3}{5} \right)^n$.

Exercice 2

Partie 1

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = 1 - x\mathrm{e}^{1-x}.$$

On admet que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1. (a) Déterminer la limite de g en $-\infty$.
   (b) Déterminer la limite de g en $+\infty$.
   En déduire une asymptote de $\mathscr{C}$.
2. (a) Déterminer la dérivée de g.
   (b) Dresser le tableau de variation de g.
3. (a) Déterminer, pour tout réel x, $g''(x)$.
   (b) Étudier la convexité de g sur $\mathbb{R}$ et justifier que g admet un point d'inflexion au point d'abscisse 2.
4. (a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.
   (b) Déterminer la position relative de (T) et de $\mathscr{C}$.
5. Tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}$, les asymptotes, la droite (T) et la tangente au point d'abscisse 0.
   On rappelle que $\mathrm{e} \simeq 2,72$ *et* $\mathrm{e}^{-1} \simeq 0,37$.

Partie 2

On définit la fonction f par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < \mathrm{e} \\ 4\mathrm{e}^2 \, \dfrac{\ln(t) - 1}{t^3} & \text{si} \quad t \geqslant \mathrm{e} \end{cases}.$$

6. (a) Donner une primitive de $t \longmapsto \dfrac{1}{t^3}$ sur $[\mathrm{e}, +\infty[$.

   (b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout réel x strictement supérieur à e :

$$\int_{\mathrm{e}}^{x} \frac{\ln(t) - 1}{t^3} \mathrm{d}t = \frac{1}{2\, x^2} \left(\frac{1}{2} - \ln(x) \right) + \frac{1}{4\mathrm{e}^2}$$

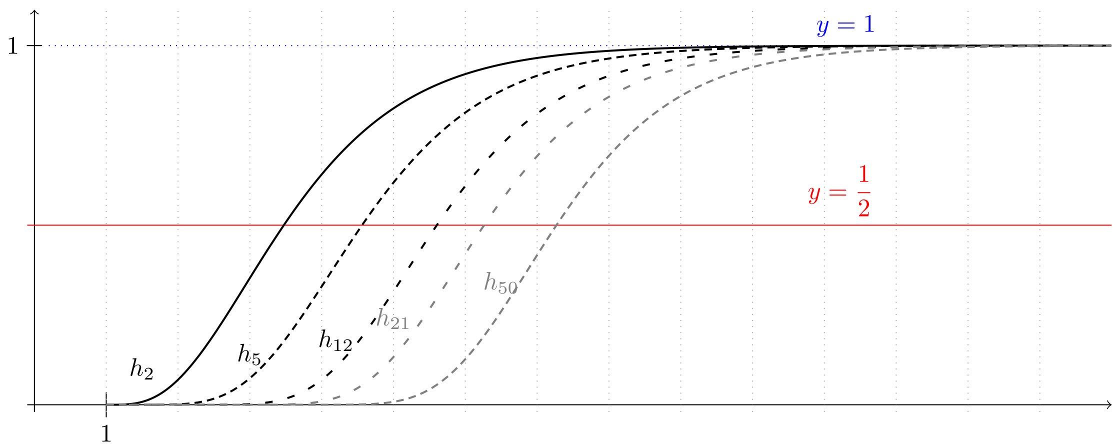
   (c) En déduire que la fonction f est une densité de probabilité.

7. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
   Soit X une variable aléatoire de densité f définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition F de X sur $\mathbb{R}$.
   (b) Calculer, en fonction du nombre e, les probabilités $\mathbb{P}\left([X \leqslant \mathrm{e}^2]\right)$, $\mathbb{P}\left([\mathrm{e}^2 < X \leqslant \mathrm{e}^3]\right)$ et $\mathbb{P}_{[X \geqslant \mathrm{e}^2]}\left([X < \mathrm{e}^3]\right)$.
8. (a) On définit la fonction G par :
$$\forall x \geqslant \mathrm{e}, \quad G(x) = -\frac{\ln x}{x}.$$
   On admet que G est dérivable sur $[\mathrm{e}, +\infty[$.
   Déterminer la dérivée de G sur $[\mathrm{e}, +\infty[$.
   (b) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que son espérance vaut $4\mathrm{e}$.
9. (a) Montrer que, pour tout réel t supérieur ou égal à e^2, $t^2 f(t) \geqslant \dfrac{4\mathrm{e}^2}{t}$.
   (b) Montrer que X n'admet pas de variance.
10. Soit n un entier naturel non nul.
   On considère la famille de variables aléatoires indépendantes $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ suivant toutes la même loi que X.
   On appelle Z_n la variable aléatoire égale à $Z_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
   On rappelle que, pour tout réel x, $[Z_n \leqslant x] = [X_1 \leqslant x] \cap [X_2 \leqslant x] \cap \ldots \cap [X_n \leqslant x]$.
   (a) Montrer que la fonction de répartition F_n de Z_n est définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \big(F(x)\big)^n.$$
   (b) Vérifier que, pour tout réel x supérieur ou égal à 1, $\mathbb{P}\left(\left[\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} Z_n \leqslant \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right]\right) = \left(1 - x e^{1-x}\right)^n$.
   (c) Est-il prévisible que, pour $x = 1$, $\mathbb{P}\left(\left[\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} Z_n \leqslant \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right]\right) = 0$?

Partie 3

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction h_n sur $[1, +\infty[$ par
$$\forall x \in [1, +\infty[,\ h_n(x) = \left(1 - x e^{1-x}\right)^n = \big(g(x)\big)^n.$$
où g est la fonction définie à la partie 1.
On admet que h_n est dérivable sur $[1, +\infty[$.

11. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Déterminer $h_n(1)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h_n(x)$.
   (b) Montrer que h_n est croissante sur $[1, +\infty[$.
   On admet que h_n est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
   (c) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, il existe un unique réel α_n de $[1, +\infty[$ tel que $h_n(\alpha_n) = \dfrac{1}{2}$.
12. À l'aide du graphique suivant, conjecturer la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$.



13. Soit n un entier naturel non nul.
    (a) Vérifier que $h_{n+1}(\alpha_n) = \dfrac{1-\alpha_n e^{1-\alpha_n}}{2}$.
    (b) En déduire que $\alpha_n \leqslant \alpha_{n+1}$.
14. Que dire du comportement de la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 3

Une boîte contient dix foulards dont trois foulards sur lesquels sont dessinés des roses, cinq foulards ayant des motifs à carreaux et deux foulards avec des représentations d'instruments de musique.
Ces foulards sont indiscernables au toucher, garantissant l'indépendance des tirages avec remise.
On suppose qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ modélisant cette expérience. Toutes les variables aléatoires sont alors définies dans cet espace probabilisé.

Partie 1

Dans cette partie, n tirages avec remise sont effectués dans cette boîte, n étant un entier naturel non nul.

1. On appelle R la variable aléatoire égale au nombre de foulards avec des roses obtenus au cours de ces n tirages.
    (a) Donner la loi de R en précisant l'ensemble $R(\Omega)$ des valeurs prises par R ainsi que l'expression de la probabilité $\mathbb{P}([R=k])$ pour tout élément k de $R(\Omega)$.
    (b) Exprimer en fonction de n l'espérance et la variance de R.

On admet que la variable aléatoire C égale au nombre de foulards avec des carreaux obtenus au cours de ces n tirages, suit une loi binomiale de paramètres $\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$ et que la variable aléatoire M égale au nombre de foulards avec des représentations d'instruments de musique obtenus au cours de ces n tirages, suit une loi binomiale de paramètres $\left(n, \dfrac{1}{5}\right)$.

2. On considère la variable aléatoire $S = R + C$.
    (a) Déterminer $\mathbb{P}([S=0])$ et $\mathbb{P}([S=1])$.
    (b) Justifier que S suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
    (c) Donner l'espérance de S et vérifier que $\mathbb{V}(S)$, la variance de S, vaut $\dfrac{4}{25}\,n$.
3. (a) Déterminer la covariance de R et C.
    (b) Les variables R et C sont-elles indépendantes ?
    (c) Montrer que le coefficient de corrélation linéaire de R et C est $\rho(R,C) = -\sqrt{\dfrac{3}{7}}$.
4. Les bibliothèques suivantes sont importées comme suit :

```
 import numpy as np
import numpy.random as rd
```

```
def Foulards(n):
    R=0; C=0; M=0;
    for k in range(n):
        p=rd.random()
        if  p<3/10:
            R=R+1
        elif p<8/10:
            C=C+1
        else :
            M=M+1
    return [R,C,M]
```

    (a) Que renvoie la fonction `Foulards` ?
    (b) À l'aide la fonction précédente, écrire un script en langage `Python` permettant de déterminer une valeur approchée de $\boldsymbol{E}(RC) - \boldsymbol{E}(R)\boldsymbol{E}(C)$, où $\boldsymbol{E}$ désigne l'espérance.

Partie 2

Dans cette partie, les tirages sont effectués avec remise et jusqu'à l'obtention d'au moins un foulard avec des roses et d'au moins un foulard sans roses.

5. Soit T la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir un foulard portant soit des carreaux soit des instruments de musique, c'est-à-dire un foulard sans roses.
   (a) Reconnaître la loi de T, en justifiant précisément.
   (b) Donner l'espérance $\boldsymbol{E}(T)$ et la variance $\mathbb{V}(T)$.
6. Pour tout entier naturel k non nul, R_k désigne l'événement «obtenir un foulard avec des roses au $k^{\text{ème}}$ tirage» .
   Soit N la variable aléatoire égale au nombre total de tirages réalisés lorsque l'expérience s'arrête.
   (a) Préciser l'ensemble $N(\Omega)$ des valeurs prises par N.
   (b) Exprimer l'événement $[N = 2]$ à l'aide de R_1, $\overline{R_1}$, R_2, $\overline{R_2}$.
   (c) Déterminer la probabilité $I\!\!P([N = 2])$.
   (d) Exprimer $[N = 3]$ à l'aide des événements R_1, R_2, R_3, $\overline{R_1}$, $\overline{R_2}$ et $\overline{R_3}$,
   puis montrer que $I\!\!P([N = 3]) = \dfrac{21}{100}$.

   On admet que, plus généralement, pour tout entier k supérieur ou égal à 2,
   $$I\!\!P([N = k]) = \frac{7}{10} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^{k-1} + \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^{k-1}.$$
   (e) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} I\!\!P([N = k]) = 1$.
7. Soit q un réel non nul de $]-1, 1[$.
   Pour tout entier naturel n non nul, on définit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}$.
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $(1 - q)^2 S_n = 1 - (n + 1)q^n + nq^{n+1}$.
   (b) On admet que, si $x \in]-1, 1[$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nx^n = 0$.
   En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} kq^{k-1}$ converge et donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1}$
8. À l'aide du résultat de la question précédente, démontrer que N admet une espérance et que $\boldsymbol{E}(N) = \dfrac{79}{21}$.
9. (a) Calculer la probabilité $I\!\!P\big([T = 1] \cap [N = 2]\big)$.
   (b) Les variables aléatoires T et N sont-elles indépendantes ?

Partie 3

L'entreprise qui fabrique ces foulards tient à jour une base de données qui contient notamment la table `foulards`, constituée ainsi :

```
foulards
```

```
ref : TEXT
tissu : TEXT
marque : TEXT
nom : TEXT
motif : TEXT
quantite : INTEGER
prix : INTEGER
delai livraison : INTEGER
```

Chaque référence désigne un unique type de foulard.

10. Une extraction de données affiche le résultat suivant (tableau partiel) :

ref	tissu	motif	quantite
2455A	soie	roses	5
732GB7	coton	instruments	68
DE894	lin	roses	24
S2457	laine	instruments	24
5848E	soie	carreaux	57
...	...	...	...
...	...	...	...

Écrire la requête permettant d'obtenir ce tableau.

11. Quel attribut peut-on choisir comme clé primaire ?
12. Le prix du foulard référencé `26ECR` a évolué et vaut maintenant 72 €.
Quelle requête le gérant doit-il écrire pour modifier la table `foulards` ?
13. Quel est l'effet de la requête
`SELECT * FROM foulards WHERE quantite > = 20 AND delai livraison < 35` ?