Code sujet : 296

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : emlyon bs

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE GÉNÉRALE

Mercredi 22 Avril 2026 de 14h à 18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Dans tout le sujet, les questions d'informatique portent sur le langage Python, on suppose que l'on a importé différentes librairies à l'aide des commandes suivantes :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

Exercice 1

Partie A : Étude d'une fonction de deux variables

On note $\mathscr{D}$ le domaine du plan :

$$\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,;\, 1+xy>0\} \,;$$

et on considère la fonction de deux variables réelles f définie sur l'ouvert $\mathscr{D}$ de $\mathbf{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}, \qquad f(x,y) = x + \ln(1+xy).$$

1. a) Calculer le gradient $\nabla f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathscr{D}$.

   b) Montrer que f admet un unique point critique (x_0, y_0) dans $\mathscr{D}$.

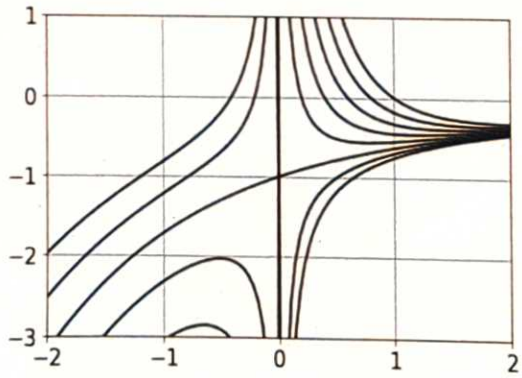
   c) Calculer la matrice hessienne $\nabla^2 f(x_0,y_0)$, puis déterminer la nature du point critique (x_0,y_0).

Soit $k \in \mathbf{R}$, on appelle *ligne de niveau* k de la fonction f le sous–ensemble du plan $\{(x,y) \in \mathscr{D} \,;\, f(x,y) = k\}$.

2. a) Soit $k \in \mathbf{R}$ et soit $(x,y) \in \mathscr{D}$ avec $x \neq 0$, montrer que :

$$f(x,y) = k \iff y = \frac{e^{k-x}-1}{x}.$$

   b) Le graphique ci–dessous, obtenu à l'aide d'un programme Python, représente certaines lignes de niveau de la fonction f.



Recopier et compléter la ligne 5 du programme ci–dessous afin qu'il produise le graphique ci–dessus. À la lecture du programme, préciser pour quelles valeurs de k la ligne de niveau k apparaît sur le graphique.

```
1 K = [-0.4+i/5 for i in range(8)]
2 X = np.linspace(-2,2,100)
3
4 for k in K:
5     M = [ ...... for x in X]
6     plt.plot(X,M,color='black')
7 plt.xlim(-2,2)
8 plt.ylim(-3,1)
9 plt.show()
```

Partie B : Étude de la ligne de niveau zéro

On considère la fonction $g: \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, \qquad g(x) = \frac{e^{-x}-1}{x}.$$

3. Donner le signe de g sur $\mathbf{R}^*$.
4. Montrer que la fonction g admet un prolongement continu en 0.

On note encore g le prolongement continu de g à $\mathbf{R}$.

5. Montrer que g est dérivable en 0, et préciser la valeur de $g'(0)$.
6. a) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^*$.
   b) Montrer que $g'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}^*$.
   c) Déterminer soigneusement les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$, puis dresser son tableau de variation.
7. On suppose le plan muni d'un repère orthonormé.
   a) Représenter sur un même dessin :
      - la courbe d'équation $1 + xy = 0$ qui délimite le domaine $\mathscr{D}$;
      - la ligne de niveau 0 de f qui est formée de la droite d'équation $x = 0$ et de la courbe de g.

   b) La ligne de niveau 0 de la fonction f divise le domaine $\mathscr{D}$ en quatre zones, dans chacune d'elles f est de signe constant. Hachurer (sur votre dessin) les deux zones dans lesquelles f prend des valeurs positives.

Partie C : Aire de la surface délimitée par la ligne de niveau zéro

Pour tout $x \in \mathbf{R}$ on pose :

$$G(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

8. Justifier que la fonction G est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, donner sa dérivée.
9. Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$G(x) = G(1) + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \ln(x).$$

10. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$ on a : $G(x) \sim -\ln(x)$.
11. Montrer que, pour $x > 0$ voisin de 0, on a :

$$\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t = -\ln(x) + G(1) + x + o(x).$$

Commentaire : l'intégrale ci-dessus est égale à l'aire de la surface formée des points de $\mathscr{D}$ situés au-dessous de la ligne de niveau 0 dont l'abscisse est comprise entre $x \in]0,1[$ et 1.

Exercice 2

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ des matrices carrées d'ordre deux à coefficients réels muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ où

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On appelle *trace* et *déterminant* les applications $\mathrm{tr}\colon \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ et $\det\colon \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ définies, pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, par :

$$\mathrm{tr}(M) = a + d \quad \text{et} \quad \det(M) = ad - bc.$$

Partie A : Un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$

1. Montrer que l'application tr est linéaire.

On définit une application $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ en posant, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$,

$$\varphi(M) = \mathrm{tr}(M)I - M$$

où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

2. a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
   b) Vérifier que $\varphi(I) = I$.
   c) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, montrer que $\mathrm{tr}\big(\varphi(M)\big) = \mathrm{tr}(M)$.
3. a) Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
   b) Calculer A^2. En déduire que A est inversible et donner son inverse.
   c) Déterminer le spectre de A, ainsi qu'une base de chacun de ses sous–espaces propres.

Partie B : Deux formules d'inversion

4. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, exprimer $\varphi(M)$ comme un tableau de nombres puis établir :

$$M\varphi(M) \quad = \quad \det(M)I.$$

5. a) Déduire de cette égalité que M est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$, et que dans ce cas

$$M^{-1} \quad = \quad \frac{1}{\det(M)}\varphi(M).$$

   b) Soient M et N deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telles que $M + N$ soit inversible. Montrer que :

$$(M+N)^{-1} \quad = \quad \frac{\det(M)}{\det(M+N)}M^{-1} + \frac{\det(N)}{\det(M+N)}N^{-1}.$$

Partie C : Polynômes de Tchebychev et trace des matrices de déterminant 1

On note $(P_n)_{n\geqslant 0}$ la suite des polynômes de Tchebychev définie par ses deux premiers termes

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad P_0(x) = 0 \quad \text{et} \quad P_1(x) = 1$$

et la relation de récurrence, valable pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad P_{n+1}(x) \; = \; xP_n(x) - P_{n-1}(x).$$

6. a) Déterminer les polynômes P_2 et P_3.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $\deg(P_n) = n-1$.

7. Soit M une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ de déterminant 1, c'est-à-dire avec $\det(M) = 1$.
On définit une suite de nombres réels $(a_n)_{n \geqslant 0}$ en posant, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$a_n \; = \; P_n(\mathrm{tr}(M)).$$

a) À l'aide de l'identité établie en question 4, montrer que :

$$M^2 = \mathrm{tr}(M)M - I.$$

b) Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$M^n = -a_{n-1}I + a_n M \qquad (*)$$

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe un polynôme Q_n tel que :

$$\mathrm{tr}\big(M^n\big) = Q_n(\mathrm{tr}(M)).$$

Exprimer le polynôme Q_n à l'aide des polynômes de Tchebychev.

8. a) Compléter la fonction Python « `P(n,x)` » ci-dessous qui prend en argument un entier naturel n et un réel x, et qui renvoie le nombre $P_n(x)$. Vous pouvez utiliser autant de lignes que vous le souhaitez dans la boucle « `for` ».

```
def P(n,x):
    P0 = 0
    P1 = 1
    for k in range(1,n+1):
        .....
        .....
        .....
    return(P0)
```

b) En utilisant la fonction « `P(n,x)` » ainsi que l'identité $(*)$ ci-dessus, rédiger une fonction Python « `Puissance(n,M)` » qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et une matrice M de déterminant 1, et qui renvoie la matrice M^n. On suppose la matrice M construite à l'aide de la commande « `np.array` ».

Rappel Python : La commande « `np.eye(2)` » renvoie la matrice identité d'ordre 2.

Exercice 3

La partie C est indépendante des parties A et B.

Toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

On dispose d'une pièce qui tombe sur pile avec une probabilité $p \in]0,1[$, on pose $q = 1-p$. Lorsqu'on effectue une succession de $n \geqslant 2$ lancers avec cette pièce on note, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

- P_k l'évènement : « on obtient pile au k-ième lancer »,
- F_k l'évènement : « on obtient face au k-ième lancer ».

Par abus de notation, on omettra le symbole d'intersection entre ces évènements, ainsi on écrira $P_1F_2F_3$ au lieu de $P_1 \cap F_2 \cap F_3$. Enfin, on appelle :

- *double pile* tout évènement de la forme $P_{k-1}P_k$ avec $k \in [\![2, n]\!]$,
- *pile isolé* tout évènement de la forme P_1F_2 ou $F_{k-1}P_kF_{k+1}$ avec $k \in [\![2, n-1]\!]$.

Partie A : Rang moyen du premier double pile

On considère la *première expérience aléatoire* suivante : on lance une pièce jusqu'à obtenir un premier pile, puis on relance la pièce une seule fois. On note :

- N la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués,
- S l'évènement « le dernier lancer donne pile ».

Exemple : si la succession de lancers donne $F_1P_2F_3$ alors on a $N = 3$ et l'évènement $\overline{S}$ est réalisé, si la succession de lancers donne $F_1F_2F_3P_4P_5$ alors on a $N = 5$ et l'évènement S est réalisé.

1. a) Reconnaître la loi de la variable aléatoire $N - 1$ qui donne le rang du premier lancer pile.

   b) En déduire la loi de N, puis donner son espérance $\mathbf{E}(N)$ et sa variance $\mathbf{V}(N)$.

2. a) Soit $n \geqslant 2$, calculer la probabilité $\mathbf{P}((N = n) \cap S)$.

   b) Montrer que $\mathbf{P}(S) = p$.

On s'intéresse maintenant à l'expérience aléatoire consistant à lancer la pièce jusqu'à obtenir un premier double pile. On admet que cela revient à répéter de manière indépendante la première expérience aléatoire jusqu'à la réalisation de l'évènement S. On note alors :

- R la variable aléatoire égale au nombre de répétitions de la première expérience aléatoire,
- T la variable aléatoire égale au nombre total de lancers effectués,

et, pour tout un entier $i \geqslant 1$,

- N_i la variable aléatoire égale au nombre de lancers réalisés lors de la i–ème répétition de la première expérience aléatoire si $R \geqslant i$, et égale à 0 si $R < i$.

On admet que toutes ces variables aléatoires sont bien définies presque sûrement.

Exemple : la série de lancers $F_1P_2F_3F_4F_5F_6P_7P_8$ se décompose en deux répétitions de la première expérience aléatoire, on a $F_1P_2F_3$ puis $F_4F_5F_6P_7P_8$, ce sont les deux exemples vus précédemment. Dans ce cas, on a $R = 2$, $T = 8$, $N_1 = 3$, $N_2 = 5$ et $N_i = 0$ pour tout $i \geqslant 3$.

3. a) Déterminer la loi de R.

   b) En moyenne, combien de piles isolés obtient–on avant le premier double pile ?

4. Soit $i \geqslant 1$ un entier. On admet que la loi conditionnelle de N_i sachant $(R \geqslant i)$ est la loi de N.

   a) Calculer $\mathbf{P}(N_i = 0)$.

   b) Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$, $\mathbf{P}(N_i = k) = p\, q^{i+k-3}$.

   c) Montrer que N_i admet une espérance donnée par : $\mathbf{E}(N_i) = q^{i-1}\dfrac{1+p}{p}$.

5. Établir que la série $\sum_{i \geqslant 1} \mathbf{E}(N_i)$ converge et calculer sa somme.

Par définition des variables aléatoires N_i on a $T = \sum_{i=1}^{+\infty} N_i$, c'est-à-dire :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad T(\omega) = \sum_{i=1}^{+\infty} N_i(\omega)$$

Notez que cette somme est (presque sûrement) bien définie puisque $N_i(\omega) = 0$ pour tout $i > R(\omega)$.

6. Soit $n \geqslant 2$.

   a) Justifier que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbf{P}(T = k) = \mathbf{P}(N_1 + \cdots + N_n = k)$.

   b) En déduire que : $\sum_{k=2}^{n} k\, \mathbf{P}(T = k) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(N_i)$.

   c) Établir que T admet une espérance.

7. Conclure que $\mathbf{E}(T) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{E}(N_i)$.

Partie B : Simulation informatique

Rappel Python : la commande « `rd.random()` » renvoie un nombre dans $[0,1[$ selon la loi uniforme sur $[0,1[$.

8. Recopier et compléter la fonction « `Exp_1(p)` » ci–dessous qui simule la première expérience aléatoire (décrite en début de partie A). Cette fonction prend en argument le paramètre $p \in]0,1[$ et renvoie un couple d'entiers (N,S), où N représente le nombre de lancers effectués, et $S \in \{0,1\}$ prend la valeur 1 si le dernier lancer a donné pile et 0 sinon.

```
def Exp_1(p):
    N = 1
    while ..... :
        N = N + 1

    if ..... :
        S = .....
    else:
        S = .....
    return N+1, S
```

9. Rédiger une fonction « `Exp_2(p)` » qui simule la deuxième expérience aléatoire consistant à répéter la première expérience aléatoire jusqu'à la réalisation de l'évènement S. Cette fonction prend en argument le paramètre p et renvoie le couple d'entiers (R,T), où R est le nombre de répétitions de la première expérience aléatoire, et T est le nombre total de lancers effectués.

   On vous demande de suivre cet algorithme :

   > On affecte aux variables R, S et T la valeur 0.
   >
   > Tant que $S=0$:
   >
   > - On augmente la variable R de 1
   > - On affecte à la variable E le résultat de `Exp_1(p)`
   > - On affecte à la variable S la deuxième composante de E
   > - On ajoute à la variable T la première composante de E
   >
   > On renvoie le couple (R,T)

10. a) Rédiger une fonction « `Freq_T(n,p)` » qui prend en argument un entier $n \geqslant 2$ ainsi que le paramètre p, et qui renvoie la fréquence d'apparition de n parmi 10^4 réalisations de la variable aléatoire T (on pourra simuler T par la deuxième composante de « `Exp_2(p)` »).

    b) En exécutant la commande « `Freq_T(4,1/2)` » l'ordinateur affiche « `0.123` ».
    Ce résultat vous paraît–il cohérent ? Justifier votre réponse.

Partie C : Nombre de doubles piles

On réalise une succession infinie de lancers avec la même pièce qui tombe sur pile avec une probabilité p, et on note $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de variables aléatoires définies par :

$$\forall n \geqslant 1, \qquad Y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } P_nP_{n+1} \text{ est réalisé,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, Y_n prend la valeur 1 si on réalise un double pile lors des n–ième et $n+1$–ième lancers.

11. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Reconnaître la loi de Y_n, puis donner son espérance $\mathbf{E}(Y_n)$ et sa variance $\mathbf{V}(Y_n)$.

12. Soit n et m deux entiers avec $n \geqslant 1$ et $m \geqslant n+2$.

    a) Les variables aléatoires Y_n et Y_{n+1} sont–elles indépendantes ? Même question avec Y_n et Y_m.

    b) Calculer les covariances $\mathbf{cov}(Y_n, Y_{n+1})$ et $\mathbf{cov}(Y_n, Y_m)$.

Soit $n \geqslant 1$ un entier, on s'intéresse à la variable aléatoire S_n égale au nombre de doubles piles survenus au cours des $n+1$ premiers lancers, on a :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k.$$

13. a) Calculer l'espérance $\mathbf{E}(S_n)$, et montrer que la variance $\mathbf{V}(S_n)$ est donnée par :

$$\mathbf{V}(S_n) \quad = \quad np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p).$$

b) En déduire que :

$$\mathbf{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) \quad \leqslant \quad \frac{3p^2}{n}.$$

14. Soit $\varepsilon > 0$, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev établir :

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p^2\right| \geqslant \varepsilon\right) \quad \leqslant \quad 3\left(\frac{p}{\varepsilon}\right)^2 \frac{1}{n}.$$

En déduire :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p^2\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

Fin de l'énoncé