

## EXERCICE 1

1. a) La fonction  $t \mapsto \frac{1 - e^{-t}}{t}$  est définie et continue sur  $]0; 1]$  comme quotient de deux fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ , dont le dénominateur ne s'annule qu'en 0. L'intégrale  $\int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt$  est donc impropre en 0.

Or l'équivalent classique  $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ , donne ici :  $e^{-t} - 1 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -t \iff 1 - e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$ , ce qui prouve que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-t}}{t} = 1$ .

La fonction intégrée est donc prolongeable par continuité en 0, donc l'intégrale  $\int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt$  est faussement impropre, et par conséquent convergente.

b) La fonction  $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$  est continue sur  $[1; +\infty[$  comme quotient de fonctions qui le sont, donc l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$  est impropre en  $+\infty$ . Pour tout  $t \geq 1$  :  $0 < \frac{1}{t} \leq 1 \implies 0 < \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$ .

Or l'intégrale  $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$  converge : c'est une intégrale exponentielle décroissante, qui vaut d'ailleurs  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ -e^{-t} \right]_1^A = e^{-1}$ .

Le théorème de comparaison des intégrales de fonctions continues, positives assure alors que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$  converge.

2. a) Soit  $a$  un réel strictement positif. La fonction  $t \mapsto \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t}$  est définie et continue sur  $]0; +\infty[$  comme différence et quotient de fonctions qui le sont, dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle. L'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} dt$  est donc doublement impropre, en 0 et en  $+\infty$ .

L'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt$  est convergente pour la même raison qu'en 1.b) :

pour tout  $t \geq 1$ ,  $0 < \frac{e^{-at}}{t} \leq e^{-at}$  et  $\int_1^{+\infty} e^{-at} dt$  converge et vaut  $e^{-a}$ .

Ainsi,  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt$  converge comme différence d'intégrales convergentes.

Au voisinage de 0, en utilisant le développement limité classique  $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$ ,

alors  $e^{-t} - e^{-at} = 1 - t - 1 + at + o(t) = (a - 1)t + o(t)$ , donc  $\frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} = a - 1 + o(1)$ .

Ce résultat prouve que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} = a - 1$  est finie, donc que la fonction est prolongeable par continuité en 0, et  $\int_0^1 \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} dt$  est convergente car faussement impropre.