MATHÉMATIQUES APPROFONDIES - EMLyon 2026

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major Prépa

Problème 1

Partie 1 - Un exemple

Dans cette partie et dans cette partie uniquement, on se place dans le cas où $n = 2$ et où la matrice A est définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note S_1 le cercle unité du plan $\mathbb{R}^2$, défini par : $S_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ ||(x, y)|| = 1\right\}$.
L'énoncé admettait que S_1 est un fermé borné.

1. La matrice A est symétrique, donc diagonalisable d'après le théorème spectral. On trouve facilement deux valeurs propres distinctes de A :

- La matrice A est non inversible car elle a deux colonnes égales, donc 0 est valeur propre de A et il est clair que $A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, donc $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ est un vecteur propre associé à cette valeur propre.
- Il est également clair que $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, donc 2 est valeur propre de A et $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un vecteur propre associé.

La famille $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$ est alors une famille clairement orthogonale de deux vecteurs non nuls de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$: c'est une famille libre, donc une base de cet espace.

Ces deux vecteurs sont de norme $\sqrt{2}$, donc $Q = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale dont les colonnes forment une famille orthonormée de vecteurs propres de A, de sorte que :

$$A = QD\,{}^{t}Q \qquad \text{avec } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On introduit alors la fonction φ définie sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad \varphi(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}.$$

2. a) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, de la matrice-ligne et la matrice-colonne du calcul définissant $\varphi(x, y)$ on peut sortir à chaque fois un facteur $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, donc :

$$\varphi(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)^2 \cdot \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}$$