

EC-01385

BLANCO MAFFIT-BERTHIER

Gaspard

02/04/2004

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription

0 1 3 8 5

Né(e) le

0 2 / 0 9 / 2 0 0 4

Signature

B

Nom

B L A N C O H A F F I T - B E R T H I E R

Prénom (s)

G A S P A R D

Ecricome

Épreuve :

Mathématiques option T

Sujet

☒ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0 1 /

Numéro de table

2 1

Exercice IPartie 1 :

On va raisonner par récurrence pour prouver :
 $\forall n \in \mathbb{N}, H_n : "a_n + b_n = 1"$ est vraie.

Initialisation : pour $n=0$
 $a_0 + b_0 = 1$ d'initialisation est attestée.

Hérédité : Supposons que pour un certain $n \geq 0$ fixé on ait H_n vraie, montrons alors que H_{n+1} l'est aussi.

$$a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{7}{10} a_n + \frac{1}{10} b_n + \frac{3}{10} a_n + \frac{9}{10} b_n \\ = a_n + b_n$$

Soit $a_{n+1} + b_{n+1} = 1$ (par hypothèse de récurrence).
 L'hérédité est vérifiée.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, on a : a_n + b_n = 1$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

2) a- $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

b- $p \in \mathbb{R}$

$$p = \frac{3}{5} p + \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{2}{5} p = \frac{1}{10}$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{1}{4}$$

c- on a : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} v_n &= a_n - p \\ &= a_n - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$u_{n+1} = \frac{7}{10} a_n + \frac{1}{10} b_n + \frac{1}{4}$$

$$U_{n+1} = \frac{3}{8} a_n + \frac{1}{10} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{8} a_n + \frac{19}{40}$$

=

3) a -

```
4) def rang(5):  
    b = 0  
    n = 0  
    while b <= 8 :  
        n = n + 1  
        b =  
    return
```

Numéro d'inscription

0 1 3 8 5



Né(e) le

02 / 04 / 2004

Signature

Nom

BLANCO HAF FIT - BERTHIER

Prénom(s)

GASPARD

Épreuve :

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

02 / 10

Numéro de table

21

Partie 2

$$5) a- QP = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -9 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Soit $QP = 12 I_3$

b- par Q 5-a) on a :

$$QP = 12 I_3 \Leftrightarrow \frac{1}{12} QP = I_3$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{12} Q \right) P = I_3$$

On a bien P inversible, avec $P^{-1} = \frac{1}{12} Q$
 tel que $P^{-1}P = I_3$

6) a- On a $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0_{3,1}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0_{3,1}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \neq 0_{3,1}$.
 On calcule alors :

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 3 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$\text{Soit } H \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } H \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de plus;

$$H \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 \\ 3 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } H \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$H \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$H \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 \\ 3 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } H \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Finalement,

On a : 10 une valeur propre associée aux vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et 6 une valeur propre associée au vecteur propre $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) On calcule respectivement HP et PD.

$$HP = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$HP = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 10 \\ 30 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

et

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 10 \\ 30 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

Soit $HP = PD$

On a P inversible par QSB), avec $P^{-1} = \frac{1}{12} Q$

d'où $HP P^{-1} = P D P^{-1}$

Soit $H = P D P^{-1}$

7) a- On va raisonner par récurrence pour
montrer : $\forall n \in \mathbb{N} : V_n : "H^n = \frac{1}{12} P D^n Q"$ est
vraie.

Initialisation : pour $n=0$

$$\frac{1}{12} P D^0 Q = P I_3 \frac{1}{12} Q = \cancel{P \frac{1}{12} Q}$$

$$= P \frac{1}{12} Q$$

$$= I_3$$

$$= H^0$$

(sachant $P^{-1} = \frac{1}{12} Q$)

L'initialisation est attestée.

Hérédité: Supposons que pour un certain $n \geq 0$ si on a U_n vraie, montrons alors que U_{n+1} l'est aussi.

$$H^{n+1} = H^n H$$

$$= \frac{1}{12} P D^n Q H \quad (\text{par hypothèse de récurrence})$$

$$= (P D^n \frac{1}{12} Q) (P D \frac{1}{12} Q)$$

$$= P D^n P^{-1} P D \frac{1}{12} Q$$

$$= P D^n D \frac{1}{12} Q$$

$$\text{Si } H^{n+1} = P D^{n+1} \frac{1}{12} Q$$

L'hérédité est vérifiée.

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}, H^n = \frac{1}{12} P D^n Q$

b- On calcule :

$$Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -9 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

c-

Numéro d'inscription

01385



Né(e) le

02/04/2004

Signature

Nom

BLANCO HAFFIT - BERTHIER

Prénom (s)

GASPARD



Épreuve :

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

03/10

Numéro de table

21

8) a- $\forall n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{10} H \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7x_n + y_n + 1 \\ 3x_n + 9y_n - 1 \\ 10 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{7}{10}x_n + \frac{1}{10}y_n + \frac{1}{10} \\ \frac{3}{10}x_n + \frac{9}{10}y_n - \frac{1}{10} \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{10} H \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

b- On va raisonner par récurrence pour montrer que:
 $\forall n \in \mathbb{N}, G_n: \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10^n} H^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vraie

Initialisation: pour $n=0$

$$\frac{1}{10^0} H^0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10^0} I_3 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'initialisation est attestée.

Hérédité: Supposons que pour un certain $n \geq 0$ fixe on ait G_n vraie, montrons alors que G_{n+1} l'est aussi.

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} H \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{par Q 8-a})$$
$$= \frac{1}{10} H \left(\frac{1}{10^n} H^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{par hypothèse de récurrence.}$$

$$\text{Soit } \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10^{n+1}} H^{n+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'hérédité est attestée.

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10^n} H^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$

C- Unein ou a par Ca Q 8-b)

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10^n} H^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10^n} \frac{1}{12} P D^n Q \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } Q \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ par Q 7-b)}$$

$$\text{Soit } \frac{1}{10^n} \left(\frac{1}{12} P D^n \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{10^n} \left(\frac{1}{12} P \begin{pmatrix} 10^n & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 10^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \text{ car } D \text{ est diagonale.}$$

$$= \frac{1}{10^n} \left(\frac{1}{12} P \begin{pmatrix} 2 \times 10^n \\ -6^{n+1} \\ 4 \times 10^n \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{10^n} \left(\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \times 10^n \\ -6^{n+1} \\ 4 \times 10^n \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{10^n} \left(\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 \times 10^n + 6^{n+1} + 4 \times 10^n \\ 6 \times 10^n - 6^{n+1} \\ 4 \times 10^n \end{pmatrix} \right)$$

On a alors :

$$x_n = \frac{1}{10^n} \times \frac{1}{12} (2 \times 10^n + 6^{n+1} + 4 \times 10^n)$$

$$= \frac{1}{12 \times 10^n} (2 \times 10^n + 6 \times 6^n \times \frac{10^n}{10^n} + 4 \times 10^n)$$

$$= \frac{1}{12} (2 + 6 \times \left(\frac{6}{10}\right)^n + 4)$$

$$\boxed{x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

Numéro d'inscription

01385



Né(e) le

02/04/2004

Signature

Nom

BLANCO H H F F I T - B E R T H I E R

Prénom (s)

G A S P A R D

Épreuve : Mathématiques option T

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

04 / 10

Numéro de table

21

Exercice II

Partie 1 :

1) a- On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

$$\text{et } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty}$$

$$b- \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$$

$$\text{d'où } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1} \text{ par croissances comparées}$$

$\mathcal{G}$ admet une asymptote horizontale en 1 vers $+\infty$.

2) a- g est dérivable comme le produit d'un monôme et de la composée d'une fonction affine et d'une fonction exponentielle (toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$).

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

On a:

$$g'(x) = -e^{1-x} - x(-e^{1-x})$$

$$= -e^{1-x} + xe^{1-x}$$

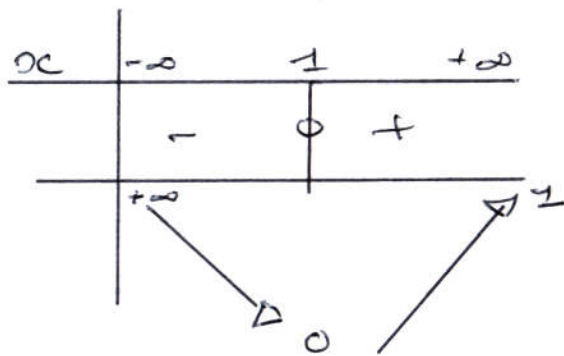
Soit $g'(x) = (x-1)e^{1-x}$

b- On a $e^x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc $g'(x)$ est du signe de $x-1$.

d'où $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

On classe alors le tableau de signe de g' et le tableau de variation de g .



Par le principe de Lagrange.

$$g(1) = 1 - e^0$$

$$= 0 \quad (\text{avec } e^0 = 1)$$

3) a- g étant de classe $\mathcal{C}^2$, g' est dérivable.

$$g''(x) = e^{1-x} + e^{1-x} - xe^{1-x}$$

Soit $g''(x) = (2-x)e^{1-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b- étudier la convexité de g revient à étudier le signe de g''

Or $e^x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

donc g' est du signe de $2-x$

d'où $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 2$,

et $g'(2) = 0$

On a alors

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	convexe	0	concave

et g admet un point d'inflexion en 2 car elle

change de convexité et admet $g''(2) = 0$

4) a- On pose (T): $y = g'(2)(x-2) + g(2)$

avec $g(2) = 1 - 2e^{1-2}$
 $= 1 - \frac{2}{e}$

et $g'(2) = (2-1)e^{1-2}$
 $= \frac{1}{e}$

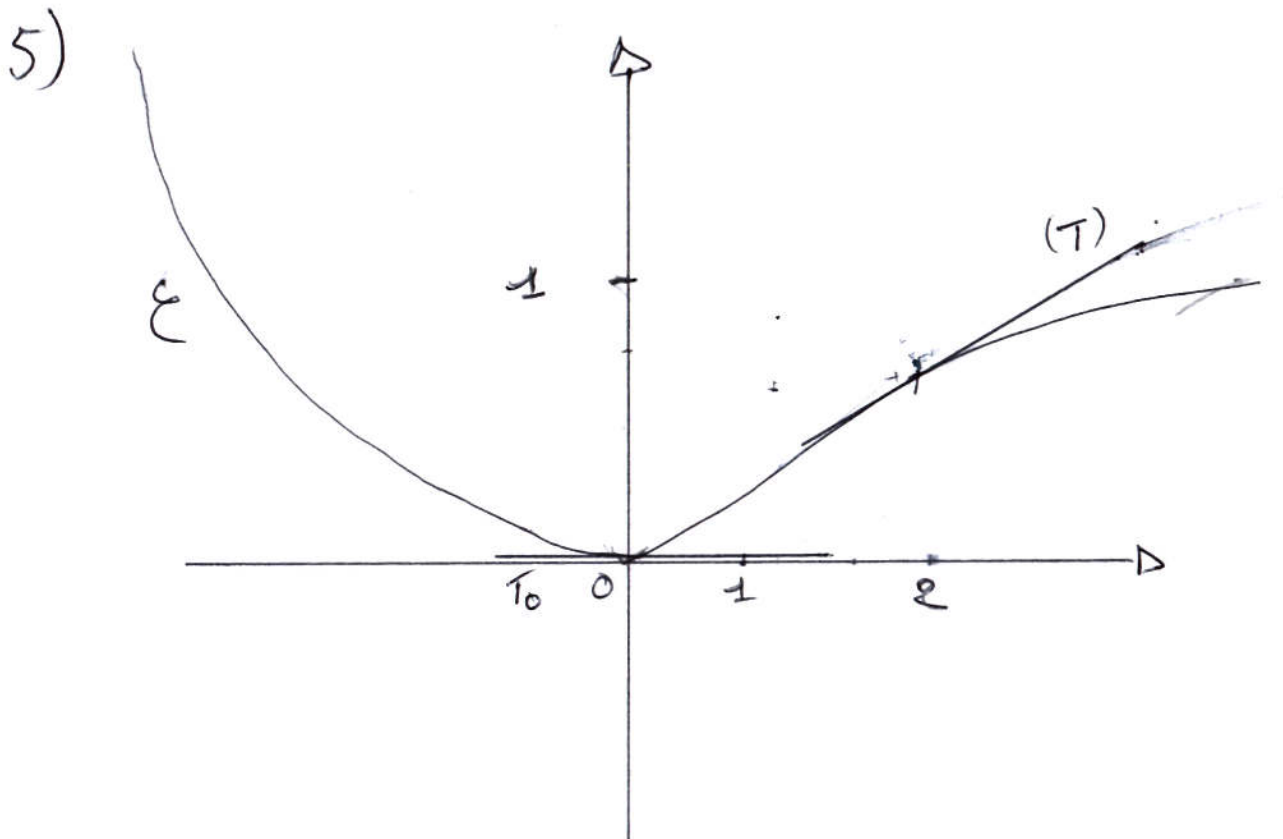
Soit $y = \frac{1}{e}(x-2) + 1 - \frac{2}{e} \Leftrightarrow \frac{x}{e} - \frac{2}{e} + 1 - \frac{2}{e}$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{e}(x-3)$

Finalement: (T): $y = 1 + \frac{1}{e}(x-3)$

b- On sait que g est convexe sur $] -\infty; 2[$ et concave sur $] 2; +\infty[$.

Donc, g est au dessus de ses tangentes sur $] -\infty; 2[$ et en dessous sur $] 2; +\infty[$.
Soit ξ est au dessus de (T) sur $] -\infty; 2[$ et en dessous sur $] 2; +\infty[$.



Numéro d'inscription

01385



Né(e) le

02/04/2004

Signature

Nom

BLANCO THAFFIT-BERTHIER

Prénom(s)

GASPARD

Épreuve : Mathématiques option T

Sujet

☒ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

05

/ 10

Numéro de table

21

Partie 2

6) a- Gu a $\frac{1}{-2t^2}$ une primitive de e^{-3} sur $\mathbb{C}; +\infty$

b- Gu va raisonner avec une intégration par parties pour tout réel $x > e$:
Gu pose

$$\begin{cases} u(x) = \ln(t) & \text{et } u'(x) = \frac{1}{t} \\ v(x) = -\frac{1}{2t^2} & \text{et } v'(x) = \frac{1}{t^3} \end{cases}$$

Avec u' et v' continue sur $\mathbb{R}^*$.
Gu a alors : ~~$\forall x \in \mathbb{C}; +\infty$~~ $\forall x > e$

$$\begin{aligned} \int_e^x \frac{\ln(t) - 1}{t^3} dt &= \left[\ln(t) \cdot \left(\frac{1}{-2t^2} \right) \right]_e^x - \int_e^x \frac{1}{-2t^3} dt \\ &= -\frac{\ln(x)}{2x^2} + \frac{\ln(e)}{2e^2} + \frac{1}{2} \int_e^x \frac{1}{t^3} dt \quad (\text{par linéarité de l'intégrale}) \\ &= \frac{1}{2e^2} - \frac{\ln(x)}{2x^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{-2t^2} \right]_e^x \quad (\text{avec } \ln(e) = 1) \end{aligned}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$\text{Soit } \int_e^x \frac{f_u(t)}{t^3} dt = \frac{1}{2e^2} - \frac{f_u(x)}{2x^2} + \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{4e^2}$$

$$= \frac{2}{4e^2} - \frac{1}{4e^2} + \frac{1}{2x^2} \left(\frac{1}{2} - f_u(x) \right)$$

$$\text{d'où } \int_e^x \frac{f_u(t)}{t^3} dt = \frac{1}{2x^2} \left(\frac{1}{2} - f_u(x) \right) + \frac{1}{4e^2} \quad \forall x \in]e; +\infty[$$

c- On a f qui est définie sur $\mathbb{R}$.
 De plus f est continue sur $]0; e[$ comme constante et sur $]e; +\infty[$ comme quotient de e^3 et de $f_u(t)$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

étude en e

$$\bullet \lim_{t \rightarrow e^-} f(t) = 0$$

$$\bullet \lim_{t \rightarrow e^+} f(t) = 0$$

f admet ~~un~~ des limites finies en e.
 f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

$$f(t) = 0 \geq 0 \quad \text{sur } t < e.$$

$$\text{et } f(t) \geq 0 \quad \text{sur } t \geq e \quad \text{avec } \frac{f_u(t)-1}{t^3} \geq 0 \quad \forall t \geq e$$

et $e^3 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

f est donc positive sur $\mathbb{R}$.

De plus on a :

$f(t) = 0 \quad \forall t \in]-\infty, e[$, d'où
 $\int_{-\infty}^e f(t) dt$ converge et $\int_{-\infty}^e f(t) dt = 0$.

On pose $x > e$ un réel.

$$\begin{aligned} \int_e^x f(t) dt &= 4e^2 \int_e^x \frac{\ln(t) - 1}{e^3} dt \quad \text{par linéarité de l'intégrale.} \\ &= 4e^2 \left(\frac{1}{2x^2} \left(\frac{1}{2} - \ln(x) \right) + \frac{1}{4e^2} \right) \end{aligned}$$

Par la Q 6-5).

et on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} \left(\frac{1}{2} - \ln(x) \right) = 0 \quad \text{par croissances comparées.}$$

$$\text{ayant } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

On a alors

$$\lim \int_e^{+\infty} f(t) dt \text{ qui converge et}$$

$$\begin{aligned} \int_e^{+\infty} f(t) dt &= 4e^2 \times \frac{1}{4e^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Enfin, $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt$ converge et par relation de
Chesley, on a :

$$\int_{-\infty}^e g(t) dt + \int_e^{+\infty} g(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt \\ = 1$$

Enfin, g est une densité de probabilité

7) Soit Ω un univers lié à cette expérience.

a. On a $F_X(x) = P(X \leq x)$
 $= \int_{-\infty}^x g(t) dt.$

• Pour $x < e$

$$\int_{-\infty}^x g(t) dt = 0$$

• Pour $x \geq e$

$$\int_{-\infty}^x g(t) dt = \int_{-\infty}^e g(t) dt + \int_e^x g(t) dt \quad (\text{par relation de Chesley}) \\ = 0 + \frac{1}{2x^2} \left(\frac{1}{2} - \ln(x) \right) + \frac{1}{4e^2} \quad (\text{par Q 6-b})$$

Enfin on a :

Numéro d'inscription

01385



Né(e) le

02/04/2004

Signature

Nom

BLANCO H H F F T I - BERTHIER

Prénom(s)

GASPARD

Ecricome

Épreuve : Mathématiques option T

Sujet

☒ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

06/10

Numéro de table

21

$$F_x(x) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < e \\ \frac{1}{2x^2} \left(\frac{1}{2} - \ln(x) \right) + \frac{1}{4e^2} & \text{si } x \geq e \end{cases}$$

$$b- P(X \leq e^2) = \int_{-\infty}^{e^2} g(t) dt$$

$$= F_x(e^2)$$

$$= \frac{1}{2e^4} \left(\frac{1}{2} - \ln(e^2) \right) + \frac{1}{4e^2}$$

$$= \frac{1}{4e^4} - \frac{2}{e^4} + \frac{1}{4e^2} \quad (\text{avec } \ln(x^2) = 2 \ln(x))$$

$$\text{Soit } P(X \leq e^2) = \frac{e^2 - 7}{4e^4}$$

$$\begin{aligned} P(e^2 < X \leq e^3) &= F(e^3) - F(e^2) \\ &= \frac{e^4 - 11}{4e^6} - \frac{e^2 - 7}{4e^4} \\ &= \frac{e^4 - 11 - e^4 + 7e^2}{4e^6} \end{aligned}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$\text{Soit } P([e^2 < x \leq e^3]) = \frac{7e^2 - 11}{4e^6}$$

$$\text{Enfin : } P_{\{x \geq e^2\}}([x < e^3]) = \frac{P([e^2 \leq x < e^3])}{P\{x \geq e^2\}}$$

$$= \frac{P\{e^2 < x \leq e^3\}}{P\{x \geq e^2\}} \text{ car } x \text{ est une variable à densité}$$

$$= \frac{(7e^2 - 11)/4e^6}{1 - \frac{(e^2 - 1)}{4e^4}}$$

$$= \frac{7e^2 - 11}{4e^6} \times \frac{4e^4}{4e^4 - e^2 + 1}$$

$$= \frac{7e^2 - 11}{4e^6 - e^2 + 1}$$

$$= \frac{7e^2 - 11}{e^2(4e^4 - 1) + 1}$$

$$P_{\{x \geq e^2\}}([x < e^3]) = \frac{7}{4e^4 - 1 + \frac{1}{e^2}} - \frac{11}{e^2(4e^4 - 1) + 1}$$

$$8) a- G'(x) = - \left(\frac{1}{x^2} - \left(-\frac{1}{x^2} p_u(x) \right) \right)$$

$$= - \left(\frac{1 + p_u(x)}{x^2} \right)$$

Soit $G'(x) = \frac{-p_u(x) - 1}{x^2} \quad \forall x \in]e, +\infty[$

b- On a $\int_G g(t) dt = 0 \quad \forall t \in]-\infty, e[.$

on pose $x > e$ un réel.

et $\int_e^x \int_G g(t) dt = \int_e^x G e^2 \frac{p_u(t) - 1}{t^2} dt.$

$$= G e^2 \int_e^x \frac{p_u(t) - 1}{t^2} dt \text{ par linéarité de l'intégrale.}$$

$$= G e^2$$

3) a. $\forall \epsilon \geq e^2$ ou réel ou a:
 On a donc $f_\epsilon(t) - 1 > 0$
 On pose alors :

$$4e^2 \geq 4e^2 \Leftrightarrow \frac{4e^2}{t^3} \geq \frac{4e^2}{t^3}$$

$$\Leftrightarrow 4e^2 \frac{(f_\epsilon(t) - 1)}{t^3} \geq \frac{4e^2}{t^3} \quad \text{car } f_\epsilon(t) - 1 > 1$$

$$\Leftrightarrow \epsilon^2 g(t) \geq \frac{4e^2}{\epsilon^2} \times t^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\epsilon^2 g(t) \geq \frac{4e^2}{\epsilon} \quad \forall \epsilon > e^2 \text{ ou réel}}$$

b- On a par $x > e \int_e^x \frac{4e^2}{t} dt = \int_e^x 4e^2 f_\epsilon(t) dt = 4e^2 f_\epsilon(x) - 4e^2$

Or

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 4e^2 f_\epsilon(x) = +\infty$$

donc $\int_e^{+\infty} \frac{4e^2}{t} dt$ diverge

Soit $\int_e^x \epsilon^2 g(t) dt \geq \int_e^x \frac{4e^2}{t} dt$. * par conservation de l'ordre et croissance de l'intégrale.

d'où $\int_e^{+\infty} \epsilon^2 g(t) dt$ diverge. * n'admet pas de moment quadratique.

Par relation de Cauchy $\int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon^2 g(t) dt$ diverge.
 donc

$$\boxed{X \text{ n'admet pas de variance.}}$$

Numéro d'inscription

04385



Né(e) le

02/04/2004

Signature

Nom

BLANCO H A F F I T - B E R T H Z E R

Prénom (s)

G A S P A R D



Épreuve :

Mathématiques option T

Sujet



1

ou



2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

04 / 10

Numéro de table

21

10) a- On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$F_n(x) = \mathbb{P}[\sum_{i=1}^n X_i \leq x]$$

$$= \mathbb{P}[(X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x) \cap \dots \cap (X_n \leq x)]$$

$$= \mathbb{P}(X_1 \leq x) \mathbb{P}(X_2 \leq x) \dots \mathbb{P}(X_n \leq x) \quad \text{Par indépendance des } (X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$$

$$= F(x) \times F(x) \times F(x) \times \dots \times F(x)$$

$$\text{Soit } F_n(x) = (F(x))^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

b- On sait que $\sqrt{e} = e^{1/2}$ et donc $\frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-1/2}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

C- pour $x=1$ on a :

$$P\left(\frac{1}{e^{1/2}} Z_n \leq e^{\frac{x}{2}}\right) = (1 - e^{1-1})^n = 0$$

Partie 3

11) a. $h_n(1) = (1 - e^0)^n$
Soit $h_n(1) = 0$

De plus, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h_n(x) = 1$$

$$\text{ayant } h_n(x) = (g(x))^n$$

Finalement,

$$h_n(1) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} h_n(x) = 1$$

b- $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$G_n \text{ a } h_n(x) = (g(x))^n$$

Or $g(x)$ est croissante sur $[1; +\infty[$
et $n > 0$ un entier.

Donc h_n est croissante sur $[1; +\infty[$

c- On admet que h_n est strictement croissante
sur $[1; +\infty[$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

$h_n(x) = (g(x))^n$. Or g est dérivable sur $\mathbb{R}$,
donc g est continue sur $\mathbb{R}$ et donc $h_n(x)$
aussi. De plus, $h_n(x)$ est strictement croissante
sur $[1; +\infty[$. Donc $h_n(x)$ réalise une bijection
de $[1; +\infty[$ sur $[g(1); +\infty[$

Il existe donc un unique réel $\alpha \in [1; +\infty[$
tel que $h_n(\alpha) = \frac{1}{2}$

12) On peut conjecturer que la suite
 $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

13) On a $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \text{a- } h_{n+1}(\alpha_n) &= (1 - \alpha_n e^{1-\alpha_n})^{n+1} \\ &= (g(\alpha_n))^n (g(\alpha_n)) \\ &= \frac{1}{2} (1 - \alpha_n e^{1-\alpha_n}) \quad \text{par la Q-11-c)} \end{aligned}$$

$$\text{Soit } h_{n+1}(\alpha_n) = \frac{1 - \alpha_n e^{1-\alpha_n}}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

b- On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} h_{n+1}(\alpha_n) - h_n(\alpha_n) &= \frac{1 - \alpha_n e^{1-\alpha_n}}{2} - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{\alpha_n e^{1-\alpha_n}}{2} \end{aligned}$$

or α_n est un réel positif et $e^x \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.
donc

$$h_{n+1}(\alpha_n) - h_n(\alpha_n) < 0 \Rightarrow h_{n+1}(\alpha_n) < h_n(\alpha_n)$$

~~$\Rightarrow$~~ d'où α_n

1c) On peut dire que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est croissante et minorée. donc elle tend ~~vers 0~~ en $+\infty$ vers 0 .

Numéro d'inscription

01385



Né(e) le

02/09/2004

Signature

Nom

BLANCO HAFFIT-BERTHIER

Prénom (s)

GASPARD

Ecricome

Épreuve : Mathématiques option T

Sujet



1 ou



2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille



8 /

10

Numéro de table

21

Exercice III

Partie 1 :

Soit R un univers lié à cette expérience.

- 1) a- On a R qui compte le nombre de succès de l'expérience Rose : "obtenir une rose" que l'on répète n fois à l'identique et avec indépendance, d'où

$$R \hookrightarrow B\left(n, \frac{3}{10}\right) \quad \text{d'où} \quad R(n) = 10^n$$

$$P(R=k) = \binom{n}{k} \left(\frac{3}{10}\right)^k \left(\frac{7}{10}\right)^{n-k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

- b- Comme $R \hookrightarrow B\left(n, \frac{3}{10}\right)$; R admet une espérance et une variance.

On pose $p = \frac{3}{10}$

$$E[R] = np = \frac{3n}{10} \quad \text{et} \quad V[R] = np(1-p) = \frac{n \cdot 21}{100}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$\begin{aligned}
 2) a- \quad P(S=0) &= P(R+C=0) \\
 &= P(R=0)P(C=0) \text{ par indépendance.} \\
 &= \binom{n}{0} \left(\frac{3}{10}\right)^0 \left(\frac{7}{10}\right)^n \binom{n}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
 &= \left(\frac{7}{10}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ avec } \binom{n}{0} = 1
 \end{aligned}$$

d'où $P(S=0) = \frac{7^n}{20^n}$

et

$$\begin{aligned}
 P(S=1) &= P(R+C=1) \\
 &= P(R=1 \cap C=0) + P(R=0 \cap C=1) \\
 &= \binom{n}{1} \left(\frac{3}{10}\right)^1 \left(\frac{7}{10}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2^n} + \left(\frac{7}{10}\right)^n \binom{n}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
 &\quad \text{avec } \binom{n}{1} = n \\
 &= \frac{3n \cdot 7^{n-1}}{20^n} + \left(\frac{7}{10}\right)^n n \times \frac{1}{2^n} \\
 &= \left(\frac{7}{10}\right)^n \left(\frac{3n + 7n}{7} \right)
 \end{aligned}$$

Soit $P(S=1) = \frac{7^n}{20^n} \times \frac{10n}{7}$

b- On a bien $S(\infty) = \mathbb{N}$

On a $\mathcal{B}$ qui compte le nombre de fois où l'événement B_i "obtenir un foulard avec des logos ou à carreaux" est obtenu, lors de n tentatives

identiques et indépendantes. $S \sim \mathcal{B}(n, \frac{8}{10})$
ou $p = \frac{3}{10} + \frac{1}{2} = \frac{8}{10}$

On a: $S \sim \mathcal{B}(n, \frac{8}{10})$

$$\begin{aligned} \text{C- On a: } E[S] &= E[R+C] \\ &= E[R] + E[C] \text{ par linéarité de l'espérance} \\ &= \frac{3n}{10} + \frac{1}{2}n \\ &= \frac{8n}{10} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } E[S] = \frac{4n}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{et } V[S] &= n \left(\frac{8}{10} \right) \left(1 - \frac{8}{10} \right) \\ &= \frac{8}{50} n \end{aligned}$$

$$V[S] = \frac{4}{25} n$$

Finalement,

$$E[S] = \frac{4h}{5} \text{ et } V[S] = \frac{4}{25}h$$

3) a. On a: $Cov(R, C) = E(R, C) - E(R)E(C)$

$$E(R)E(C) = \frac{3h}{20} \times \frac{h}{2} \\ = \frac{3h^2}{20}$$

et: $E(R, C) =$

b- On a R et C deux variables indépendantes
si $Cov(R, C) \neq 0$.

$$c- \rho(R, C) = \frac{Cov(R, C)}{\sigma(R)\sigma(C)} \\ = \frac{\quad}{\sqrt{\frac{21}{100}} \sqrt{\frac{1}{4}}}$$

Numéro d'inscription

04385



Né(e) le

02/04/2004

Signature

Nom

BLANCO HAFET-BERTHIER

Prénom (s)

GASPARD

Épreuve : Mathématiques option T

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

09/40

Numéro de table

21

4) a- la fonction `gouLards` renvoie le nombre de `gouLard` obtenu pour chaque catégorie lors de n essais.

b- def espérance (n):

$R=0$; $C=0$; $H=0$;

for k in range (n):

$p = \text{rd.random}()$

if $p < 3/10$:

$R = R + k * 3/10$

elif $p < 8/10$:

$C = C + C * 8/10$

else:

$H = H + H * 2/10$

return $[R, C, H]$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

Partie 2

a- Soit T la variable qui compte le nombre de Tirages nécessaire avant de réaliser l'événement R , où R : "obtenir un foulard rose". Les Tirages sont indépendants et ~~identiques~~ l'expérience identique. On reconnaît une loi géométrique d'où:

$$T \sim \mathcal{G}\left(\frac{7}{10}\right) \quad \text{où } T(n) = n^* \\ \text{et } P(T=k) = \frac{7}{10} \times \left(\frac{3}{10}\right)^{k-1} \quad \forall k \in T(n)$$

b- Comme $T \sim \mathcal{G}\left(\frac{7}{10}\right)$, T admet une espérance et une variance. On pose $p = \frac{7}{10}$.
Soit

$$\begin{aligned} E[T] &= \frac{1}{p} = \frac{10}{7} \quad \text{et} \\ V[T] &= \frac{1-p}{p^2} = \frac{\frac{3}{10}}{\left(\frac{7}{10}\right)^2} \\ &= \frac{3}{10} \times \frac{10^2}{7^2} \end{aligned}$$

$$\text{Soit } V[T] = \frac{30}{49}$$

$$\text{Finalement, } E[T] = 10/7 \quad \text{et} \quad V[T] = 30/49$$

6) a- $\forall k \in \mathbb{N}^*$, Lors de k tirage on peut ~~ne tirer~~ jamais tirer de boules roses, soit en tirant au premier tour, ~~ou au second~~ ou au deuxième, et ainsi de suite. Mais on ne peut pas en tirer car avant d'avoir effectué un tirage.
 Donc $N(R) = \emptyset$

b- l'évènement $[N=2]$ revient à faire deux tirages avant de tirer une boule rose.
 Soit

$$[N=2] = [\bar{R}_1 \cap R_2]$$

c- Soit

$$\begin{aligned} P[N=2] &= P[\bar{R}_1 \cap R_2] \\ &= P(\bar{R}_1) P(R_2) \text{ par indépendance.} \\ &= \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} \end{aligned}$$

d'où $P[N=2] = \frac{21}{100}$

d- De manière analogue:

$$[N=3] = [\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2 \cap R_3]$$

d'où $P[N=3] =$

e- On a: $\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ avec } n \geq k$

$$\sum_{k=2}^n P[N=k] = \sum_{k=2}^n \frac{7}{10} \left(\frac{3}{10}\right)^{k-1} + \frac{3}{10} \left(\frac{7}{10}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{7}{10} \sum_{k=2}^n \left(\frac{3}{10}\right)^{k-1} + \frac{3}{10} \sum_{k=2}^n \left(\frac{7}{10}\right)^{k-1} \text{ par linéarité des Sigma.}$$

On a: $\left|\frac{3}{10}\right| < 1$ et $\left|\frac{7}{10}\right| < 1$.

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n \left(\frac{3}{10}\right)^{k-1} = \frac{1}{1 - 3/10} - 1 \quad (\text{avec } \left(\frac{3}{10}\right)^{1-1} = 1)$$

$$= \frac{10}{7} - 1$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n \left(\frac{7}{10}\right)^{k-1} = \frac{1}{1 - 7/10} - 1 \quad (\text{avec } \left(\frac{7}{10}\right)^{1-1} = 1)$$

$$= \frac{1}{3/10} - 1$$

$$= \frac{10}{3} - 1$$

d'où

$\sum_{k=2}^{+\infty} P[N=k]$ qui converge et

$$\sum_{k=2}^{+\infty} P[N=k] = \frac{7}{10} \left(\frac{10}{7} - 1\right) + \frac{3}{10} \left(\frac{10}{3} - 1\right)$$

$$= 1 - \frac{7}{10} + 1 - \frac{3}{10}$$

$$= 2 - 1$$

$$\boxed{\text{d'où } \sum_{k=2}^{+\infty} P[N=k] = 1}$$

Numéro d'inscription

01385



Né(e) le

02/09/2004

Signature

Nom

BLANCO HAFFIT-BERTHIER

Prénom (s)

GASPARD

ecricome

Épreuve : Mathématiques option T

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

10 / 10

Numéro de table

21

4) a. On va raisonner par récurrence.
 Pour prouver que $H_n: "(1-q)^2 S_n = 1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}"$
 est vraie, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Initialisation pour $n=1$

$$S_1 = \sum_{k=1}^1 q^{k-1}$$

$$= 1$$

$$\text{et } (1-q)^2 S_1 = q^2 - 2q + 1$$

et d'autre part on a :

$$1 - 2q + q^2 = (1-q)^2 S_1$$

L'initialisation est attestée.

Hérédité : Supposons que pour un certain $n \geq 1$
 fixé on ait H_n vraie, montrons alors que H_{n+1} l'est
 aussi :

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$(1-q)^2 S_{n+1} =$$

b- On admet que la série $\sum_{k \geq 1} k q^{k-1}$ converge.
 $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{On a } S_n = \frac{1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2}$$

$$\text{On a } |q| < 1$$

$$9) \quad a. \quad P(T=15 \cap N=25) = P(R_1 \cap R_2) \\ = P(N=25)$$

$$\text{Soit } P(T=15 \cap N=25) = 21/100$$

b. On calcule :

$$P(T=15) = \frac{7}{10}$$

$$\text{et } P(N=25) = \frac{21}{100}$$

$$\text{On a } P(T=15 \cap N=25) \neq P(T=15)P(N=25)$$

T et N ne sont donc pas indépendantes

Partie 3

10) SELECT fowlands

11) La référence peut être sélectionnée comme clé primaire

12) UPDATE 26ECR# = 72 INTO fowlands
~~WHERE 26ECR#~~

13) La requête sélectionne et affiche tous les fournisseurs où la quantité est supérieure ou égale à 20 et le délai de livraison est inférieur à 35.