

EC-01402

EL AYOUBI EL IDRISI

Selim

14/09/2005

Note de délibération : 17.82 / 20

Numéro d'inscription

01402



Né(e) le

14 / 09 / 2005

Signature

Nom

EL AYOUBI EL IDRISSI

Prénom (s)

SELIM

Épreuve :

Maths

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

01 /

06

Numéro de table

016

Exercice 2

Partie I

$$1) f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$\frac{1}{1-x} > 0 \text{ donc } 1-x > 0 \text{ donc } 1 > x \text{ donc } x < 1$$

$$\text{donc } D_f =]-\infty, 1[$$

$$2) f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 1^-} 1-x = 0^+$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

3) f est dérivable comme composée de fonctions dérivables sur son domaine de définition I

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

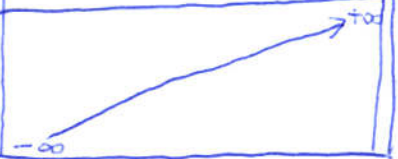
$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ donc } f'(x) = \frac{\frac{1}{(1-x)^2}}{\frac{1}{1-x}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1-x} > 0$$

donc f est strictement croissante sur I

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

x	$-\infty$	1
$f'(x)$	$+$	
f		

$$\begin{aligned} 4/a. \quad f(x) &= \ln \left(\frac{1}{1-x} \right) \\ &= \ln(1) - \ln(1-x) \end{aligned}$$

$$f(x) = -\ln(1-x)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{(-x)^2}{2} + o(x)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x)$$

$$\text{donc } \boxed{f(x) = x + \frac{x^2}{2} + o(x)}$$

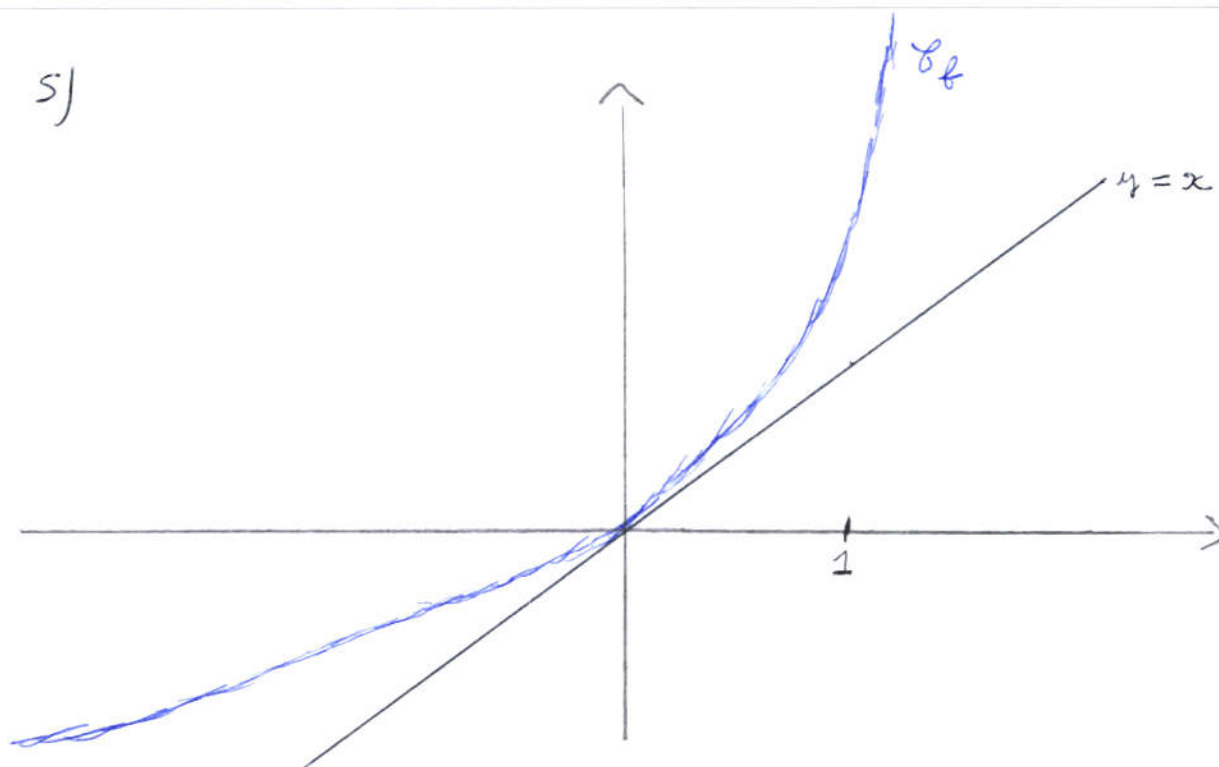
$$\begin{aligned} 4/b. \quad y &= f'(0)(x-0) + f(0) \\ &= 1(x-0) + \ln(1) \end{aligned}$$

$$\boxed{y = x}$$

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \ln \left(\frac{1}{1-x} \right) - x \\ &= x + \frac{x^2}{2} + o(x) - x \quad \downarrow \text{d'après 4/a.} \\ &= \frac{x^2}{2} + o(x) \geq 0 \end{aligned}$$

la courbe est en dessus de sa tangente au point d'abscisse 0

5)



Partie II

6/a. la série de terme général (STG) $\frac{1}{h}$ diverge par le critère de Riemann en $\alpha=1$

$$\boxed{\sum_{h \geq 1} \frac{1}{h} \text{ diverge}}$$

6/b. $\forall x \in \mathbb{R}, S_n(x) = \sum_{h=2}^n \frac{x^h}{h}$

$$S_n(1) = \sum_{h=2}^n \frac{1}{h}$$

$$S_{n+1}(2) - S_n(2) = \sum_{h=2}^{n+1} \frac{1}{h} - \sum_{h=2}^n \frac{1}{h}$$

$$= \sum_{h=2}^n \cancel{\frac{1}{h}} + \frac{1}{n+1} - \sum_{h=2}^n \cancel{\frac{1}{h}}$$

$$= \frac{1}{n+1} \geq 0$$

la suite $(S_n(2))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante

6/c. comme $S_n(2)$ est croissante d'après 6/b. et qu'elle diverge d'après 6/a. alors $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(2) = +\infty}$

~~8/2~~

$$8/2. \quad \forall x \in \mathbb{R}, S_n(x) = \sum_{h=1}^n \frac{x^h}{h}$$

$$S_{2n}(-1) = \sum_{h=1}^{2n} \frac{(-1)^h}{h}$$

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)}(-1) - S_{2n}(-1) &= \sum_{h=1}^{2n+2} \frac{(-1)^h}{h} - \sum_{h=1}^{2n} \frac{(-1)^h}{h} \\ &= \sum_{h=1}^{2n} \cancel{\frac{(-1)^h}{h}} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} - \sum_{h=1}^{2n} \cancel{\frac{(-1)^h}{h}} \\ &= \frac{-1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\ &= \frac{-(2n+2) + 2n+1}{(2n+1)(2n+2)} \\ &= \frac{-1}{(2n+1)(2n+2)} < 0 \end{aligned}$$

$S_{2n}(-1)$ est décroissante

$$S_{2n+2}(-1) = \sum_{h=1}^{2n+2} \frac{(-1)^h}{h}$$

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)+1}(-1) - S_{2n+1}(-1) &= \sum_{h=1}^{2n+3} \frac{(-1)^h}{h} - \sum_{h=1}^{2n+1} \frac{(-1)^h}{h} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} \\ &= \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} \\ &= \frac{2n+3 - (2n+2)}{(2n+2)(2n+3)} \\ &= \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \geq 0 \end{aligned}$$

$S_{2n+1}(-1)$ est croissante

Numéro d'inscription

0 1 4 0 2



Né(e) le

14 / 09 / 2005

Signature

Nom

EL AV OUBI EL IDRISSI

Prénom (s)

SELIM



Épreuve :

Maths

Sujet

☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

02 / 06

Numéro de table

016

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+2}(-1) - S_{2n}(-1) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2n+2} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

donc $(S_{2n}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes

8/b. or lorsque deux suites sont adjacentes elles convergent vers la même limite donc $(S_n(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge car les suites de ses termes pairs et impairs sont adjacentes

8/d. on admet 8/c. $\forall n \in \mathbb{N}^*, |L_n(2) - S_{2n}(-1)| \leq S_{2n}(-1) - S_{2n+1}(-1)$

$$\begin{aligned}
 S_{2n}(-1) - S_{2n+1} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} \\
 &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} - \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \right) \\
 &= - \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \\
 &= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}
 \end{aligned}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$| \ln(2) - S_{2n}(-1) | \leq \frac{1}{2n+1}$$

$$\text{or } 2n+1 \geq n$$

$$\text{donc } \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{n}$$

$$\text{donc } \boxed{\forall n > 0, | \ln(2) - S_{2n}(-1) | \leq \frac{1}{n}}$$

$$\begin{array}{l} \text{g) a. } x > 1 \\ \text{donc } x^k > 1 \\ \text{donc } \frac{x^k}{k} > \frac{1}{k} \end{array} \quad \downarrow \text{ car } \frac{1}{k} > 0$$

la série de terme général $\frac{1}{k}$ diverge par le critère de Riemann
donc par le critère de minoration sur les séries à termes positives

$$\boxed{\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k} \text{ diverge}}$$

g) b. pour $x > 1$, $\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$ est une série de termes positives et comme on sait d'après g) a. qu'elle diverge

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = +\infty \text{ lorsque } x > 1}$$

Partie III

$$20/a. \int_0^a \frac{1}{1-t} dt = - \int_0^a \frac{-1}{1-t} dt$$

$$= - \left[\ln(1-t) \right]_0^a$$

$$= - \left(\ln(1-a) - \ln(1) \right)$$

$$\boxed{\int_0^a \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-a)}$$

$$\int_0^a \frac{1}{(1-t)^2} dt = \int_0^a (1-t)^{-2} dt$$

$$= - \int_0^a - (1-t)^{-2} dt$$

$$= - \left[\frac{(1-t)^{-1}}{-1} \right]_0^a$$

$$= - \left[\frac{-1}{1-t} \right]_0^a$$

$$= - \left(-\frac{1}{1-a} + 1 \right)$$

$$\boxed{\int_0^a \frac{1}{(1-t)^2} dt = -1 + \frac{1}{1-a}}$$

$$20/b. a + R_2(a) = a + \int_0^a \frac{(a-t)^n}{(1-t)^{n+2}} dt$$

$$= a + \int_0^a \frac{((a-1) + (1-t))^n}{(1-t)^{n+2}} dt$$

$$= a + \int_0^a \left(\frac{(a-1) + (1-t)}{1-t} \right)^n \times \frac{1}{1-t} dt$$

$$= a + \int_0^a \left(\frac{(a-1)}{1-t} + 1 \right)^n \times \frac{1}{1-t} dt$$

13/ a. $t \in [0, a]$ donc $0 \leq t \leq a$
 donc $-a \leq -t \leq 0$
 donc $0 \leq a-t \leq a$

$$0 \leq t \leq a$$

$$\text{donc } -a \leq -t \leq 0$$

$$\text{donc } 1-a \leq 1-t \leq 1$$

$$\text{or } 0 \leq a \leq 1 \text{ donc } 0 \leq 1-a$$

$$\text{donc } 0 \leq 1-t \leq 1$$

$$\text{donc } 0 \leq \frac{1}{1-t} \text{ et } 0 \leq a-t \text{ donc } \boxed{\frac{a-t}{1-t} \geq 0}$$

$$1-a \leq 1-t \text{ donc } \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-a} \text{ et } a-t \leq a$$

$$\text{donc } \frac{a-t}{1-t} \leq \frac{a}{1-a} \leq a \text{ donc } \boxed{\frac{a-t}{1-t} \leq a}$$

$$\text{donc } \boxed{0 \leq \frac{a-t}{1-t} \leq a}$$

Numéro d'inscription

01402



Né(e) le

14 / 03 / 2005

Signature

Nom

EL AYOUBI EL IORISSI

Prénom (s)

SELIM



Épreuve :

Maths

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

03 /

06

Numéro de table

016

23) c. d'après 22) $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$

d'après 23) b. $0 \leq R_n(x) \leq \frac{x^{n+2}}{1-x}$

$|x| < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+2}}{1-x} = 0$
 donc par le théorème de l'encadrement $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) + R_n(x)$

$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$

↓ d'après partie II

$\boxed{f(x) = S(x)}$

24) c. la suite $(-S_n(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est ~~selle~~ avec des + bleu
 car elle est alternée et la suite avec les points rouges
 est celle de $(S_n(\frac{1}{2}))_{n \in \mathbb{N}^*}$

24) b. def Val(eps) :

compteur = 0

while np.abs(np.log(2) - np.sum(1/(h * (2**k)))) > 1/(2**n):

compteur = compteur + 1

return (compteur)

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

Exercice 3

Partie I

$$1) \forall t \in \mathbb{R}, s(t) = x(t) + y(t)$$

$$s'(t) = x'(t) + y'(t)$$

$$= x(t) + y(t) - x(t) - y(t)$$

$$s'(t) = 0$$

$$2) s'(t) = 0 \quad \text{donc } s(t) = c \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}$$

$$\text{or } s(t) = x(t) + y(t)$$

$$\text{donc } x(t) + y(t) = c \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$3) \forall t \in \mathbb{R}, s(t) = x(t) + y(t)$$

$$s(0) = x(0) + y(0)$$

$$c = 1 + 1$$

$$c = 2$$

$$\text{donc } x(t) + y(t) = 2$$

Partie II

$$4) P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

P est triangulaire inférieure et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls donc P est inversible

5) λ est valeur propre de $A \Leftrightarrow A - \lambda I$ non inversible

$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$ car A est d'ordre 2

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$(1-\lambda)(-1-\lambda) - 1 \cdot (-1) = 0$$

$$-1 - \lambda + \lambda + \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda^2 = 0$$

$$\lambda = 0$$

A possède pour unique valeur propre 0

$$6) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$$

donc A n'est pas diagonalisable

7) cherchons P^{-1} par la méthode de Gauss Jordan

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{donc } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} A P = J$$

$$\begin{aligned}
 9) \quad Y(t) &= P^{-1} X(t) \\
 Y'(t) &= P^{-1} X'(t) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} x'(t) \\ -x'(t) + y'(t) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} x(t) + y(t) \\ -x(t) - y(t) - x(t) - y(t) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} x(t) \\ \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$9) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

$$\text{donc } X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X(t)$$

$$\text{donc } X'(t) = A X(t) \quad \downarrow \text{ d'après 7)}$$

$$\text{donc } X'(t) = P J P^{-1} X(t)$$

$$\text{donc } P^{-1} X'(t) = J P^{-1} X(t)$$

$$\text{donc } Y'(t) = J Y(t)$$

x et y sont solutions de (Y)ssi $\forall t \in \mathbb{R} \quad Y'(t) = J Y(t)$

$$10) \quad Y'(t) = J Y(t)$$

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \begin{cases} u'(t) = v(t) \\ v'(t) = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} u'(t) = v(t) \\ v(t) = \lambda \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \begin{cases} u'(t) = \lambda \\ v(t) = \lambda \end{cases}$$

Numéro d'inscription

0 1 4 0 2



Né(e) le

24 / 09 / 2005

Signature

Nom

EL AYOUBI EL IDRISSI

Prénom(s)

SELIM



Épreuve :

Maths

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

04

/ 06

Numéro de table

016

$$\text{donc } \begin{cases} u(t) = \lambda t \\ v(t) = \lambda \end{cases} \quad \text{donc } Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda t \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$11) \text{ or } Y(t) = P^{-1} X(t)$$

$$\text{donc } P Y(t) = X(t)$$

$$\text{donc } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda t \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \begin{pmatrix} \lambda t \\ -\lambda t + \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \begin{cases} x(t) = \lambda t \\ y(t) = -\lambda t + \lambda \end{cases}$$

$$\text{donc } X(t) = \begin{pmatrix} \lambda t \\ -\lambda t + \lambda \end{pmatrix}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

Partie III

12) def Nil(M):

for p in range(1, n+1):

if np.dot(scipy.linalg.matrix_power(M, p), M) == 0:

return(p)

else:

M = np.dot(scipy.linalg.matrix_power(M, p), M)

15) $X(t) = B(t) X_0$

$$X'(t) = B'(t) X_0$$

$$B(t) = \sum_{h=0}^{n-2} \frac{t^h}{h!} N^h$$

$$B'(t) = \sum_{h=2}^{n-2} \frac{h t^{h-1}}{h!} N^h$$

$$= \sum_{h=2}^{n-2} \frac{h t^{h-1}}{h(h-1)!} N^h$$

$$B'(t) = \sum_{h=2}^{n-2} \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} N^h$$

donc $X'(t) = \sum_{h=1}^{n-2} \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} N^h X_0$

17) def B(N, t):

if Nil(N) == 0

return ("N n'est pas nilpotente")

else:

T = np.eye(len(N))

S = T

for h in range(r):

T = (t ** h) / (h * np.dot(T, N))

S = S + T

return S

19) comme N possède une unique valeur propre λ d'après 13)

donc ~~elle~~ N est diagonalisable ssi $N = \lambda I$

or comme N est nilpotente à partir d'un certain rang

$N^r = 0$, mais $(\lambda I)^r = \lambda^r I$

donc le fait que N est diagonalisable est absurde

donc N n'est pas diagonalisable

Exercice 1

1) comme il choisit une compagnie de manière équiprobable de 1 à n alors $X \rightarrow \mathcal{U}([1, n])$

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

$$V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

2) $\forall j \in [1, n], \forall h \in [1, n]$

$P((X=j) \cap (Y=h))$ — signifie la proba de choisir la compagnie j l'année 1 et la compagnie h l'année 2
ou si $h < j$

Numéro d'inscription

0 1 4 0 2



Né(e) le

14 / 09 / 2005

Signature

Nom

EL AY O O B I EL I O R I S S I

Prénom (s)

S E L I M



Épreuve :

Maths

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

05 /

06

Numéro de table

026

$$\begin{aligned}
 3) \quad \sum_{h=2}^n \sum_{j=h}^n \frac{1}{j} &= \sum_{j=2}^n \sum_{h=1}^j \frac{1}{j} \\
 &= \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \sum_{h=1}^j 1 \\
 &= \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} 1(j-1+1) \\
 &= \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \cdot j \\
 &= \sum_{j=2}^n 1
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{h=1}^n \sum_{j=h}^n \frac{1}{j} = n}$$

4) $(X=j)_{j \in [1, n]}$ est un système complet d'événements par la formule des probas totales :

$$\begin{aligned}
 P(Y=h) &= \sum_{j=2}^n P((X=j) \cap (Y=h)) \\
 &= \sum_{j=2}^{h-1} P((X=j) \cap (Y=h)) + \sum_{j=h}^n P((X=j) \cap (Y=h))
 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(Y=h) = \sum_{j=h}^n \frac{1}{n \cdot j}}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$\begin{aligned} 5/a. \quad \sum_{h=1}^n \sum_{j=h}^n \frac{h}{j} &= \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^j \frac{h}{j} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \sum_{h=1}^j h \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \frac{j(j+1)}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{h=1}^n \sum_{j=h}^n \frac{h}{j} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j+1)}$$

5/b. Y prend un nombre finis de valeurs donc Y admet une espérance

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{h=1}^n h P(Y=h) \\ &= \sum_{h=1}^n h \sum_{j=h}^n \frac{1}{nj} \quad \downarrow \text{d'après 5/a} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n \sum_{j=h}^n \frac{h}{j} \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n (j+1) \quad \downarrow \text{d'après 5/a} \\ &= \frac{1}{2n} \left(\sum_{j=1}^n j + \sum_{j=1}^n 1 \right) \\ &= \frac{1}{2n} \left(\sum_{j=0}^n j - 0 + n \right) \\ &= \frac{1}{2n} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{n(n+1)}{4n} + \frac{n}{2n}$$

$$= \frac{n+1}{4} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{n+2+2}{4}$$

$$E(Y) = \frac{n+3}{4}$$

6) b. X et Y prennent un nombre finis de valeurs donc XY prend un nombre finis de valeurs donc XY admet une espérance

$$E(XY) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n jk P(X=j \cap Y=k)$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j jk \frac{1}{n \cdot j}$$

on prend les termes $\neq 0$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j k$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{j(j+1)}{2}$$

$$E(XY) = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n j(j+1)$$

$$6) b. E(XY) = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n j(j+1)$$

$$= \frac{1}{2n} \left(\sum_{j=1}^n j^2 + \sum_{j=1}^n j \right)$$

$$= \frac{1}{2n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n+1}{4}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1) + 3(n+1)}{12}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1+3)}{12}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+4)}{12}$$

$$= \frac{(n+1)2(n+2)}{12}$$

$$E(XY) = \frac{(n+1)(n+2)}{6}$$

$$\begin{aligned} 6) \text{ c. } \text{cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{6} - \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+3}{4} \end{aligned}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{6} - \frac{(n+1)(n+3)}{8}$$

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{8(n+1)(n+2) - 6(n+1)(n+3)}{48}$$

7) X et Y sont indépendantes $\Rightarrow \text{cov}(X, Y) = 0$
 par contraposée $\text{cov}(X, Y) \neq 0 \Rightarrow X$ et Y ne sont pas indépendantes
 or d'après 6) c. $\text{cov}(X, Y) \neq 0$

donc X et Y ne sont pas indépendantes

8) b. la fonction `MySt` renvoie le coefficient de corrélation linéaire des variables stochastiques X et Y

Numéro d'inscription

01402



Né(e) le

14 / 09 / 2005

Signature

Nom

ELAYOUBI ELIDRISSI

Prénom(s)

SELTIM



Épreuve : Maths

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

06 / 06

Numéro de table

016

$$8) a. E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{or } n=100$$

$$\text{donc } E(X) = \frac{101}{2}$$

$$E(X) = 50,5$$

$$E(Y) = \frac{n+3}{4} \quad \text{or } n=100$$

$$\text{donc } E(Y) = \frac{103}{4} \approx 25$$

$$9) a. A_n \text{ est } (X=j) \cap (Y=h) \text{ avec } j=h \text{ pour tous les } j$$

$$\text{donc } A_n = \bigcup_{j=1}^n (X=j) \cap (Y=j)$$

$$9) b. P(A_n) = P\left(\bigcup_{j=1}^n (X=j) \cap (Y=j)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^n P((X=j) \cap (Y=j))$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{1}{nj}$$

$$P(A_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$$

les événements $(X=j) \cap (Y=k)$ sont ~~compatibles~~ incompatibles

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

9/c. $j \geq 1$, $\ln(x)$ est continue sur $[j, j+2]$

$\ln(x)$ est dérivable sur $]j, j+2[$

donc par l'inégalité des accroissements finis $\exists m, M \in \mathbb{R}/$

$$m(j+1-j) \leq \ln(j+2) - \ln(j) \leq M(j+1-j)$$

$$m \leq \ln(j+2) - \ln(j) \leq M$$

$$\text{or } m \leq (\ln(x))' \leq M \text{ donc } m \leq \frac{1}{x} \leq M$$

$$\text{or } j \leq x \leq j+2 \text{ donc } \frac{1}{j+2} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{j}$$

$$\text{donc } \boxed{\frac{1}{j+2} \leq \ln(j+2) - \ln(j) \leq \frac{1}{j}}$$

$$9/d. \frac{1}{j+2} \leq \ln(j+2) - \ln(j)$$

$$\text{donc } \sum_{j=2}^n \frac{1}{j+2} \leq \sum_{j=2}^n \ln(j+2) - \ln(j)$$

$$\text{donc } \sum_{j=2}^{n+2} \frac{1}{j} \leq \ln(n+2) \quad \downarrow \text{ télescope }$$

$$\text{donc } \sum_{j=2}^{n+2} \frac{1}{j} + 1 \leq \ln(n+2)$$

$$\text{donc } \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} + \frac{1}{n+2} \leq \ln(n+2) + 1$$

$$\text{donc } \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \leq \ln(n+2) + 1 - \frac{1}{n+2}$$

$$\text{donc } \frac{1}{n} \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \leq \frac{\ln(n+2)}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+2)}$$

$$\ln(j+1) - \ln(j) \leq \frac{1}{j}$$

donc $\sum_{j=2}^n \ln(j+1) - \ln(j) \leq \sum_{j=2}^n \frac{1}{j}$ ↙ telescoping

donc $\ln(n+1) \leq \sum_{j=2}^n \frac{1}{j}$

donc $\boxed{\frac{\ln(n+1)}{n} \leq P(A_n)}$ ↘ car $\frac{1}{n} > 0$

g/e. $\frac{\ln(n+1)}{n} \leq P(A_n) \leq \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n}$

donc $\frac{\frac{\ln(n+1)}{n}}{\frac{\ln(n)}{n}} \leq \frac{P(A_n)}{\frac{\ln(n)}{n}} \leq \frac{\frac{1}{n}}{\frac{\ln(n)}{n}} + 1$

donc $\frac{\ln(n+1)}{n} \times \frac{n}{\ln(n)} \leq \frac{P(A_n)}{\frac{\ln(n)}{n}} \leq \frac{1}{n} \times \frac{n}{\ln(n)} + 1$

donc $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{P(A_n)}{\frac{\ln(n)}{n}} \leq \frac{1}{\ln(n)} + 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(n)} + 1 = 1$

$$\begin{aligned} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} &= \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \\ &= 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \end{aligned}$$

$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

donc par le théorème de l'encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(A_n)}{\frac{\ln(n)}{n}} = 1$

donc $\boxed{P(A_n) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n}}$

