

EC-07716

BILLEROT--O'DONOGHUE

Sacha

07/03/2005

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription

07716



Né(e) le

07 / 03 / 2005

Signature

Nom

BILLET - - O'DONOGHUE

Prénom(s)

SACHA

Épreuve :

Mathématiques appliquées

Sujet

☐

1

ou

☐

2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

☐

01

/

☐

10

Numéro de table

☐

02

☐☐

exercice 2 :

$$(1) a) t \mapsto \frac{1-e^{-t}}{t} \in C^0(\mathbb{D}_c, \mathbb{R})$$

Impropriété en 0 :

$$\text{Comme } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = f'(0) = 1$$

$$\text{où } f(t) = t e^{-t}$$

On a un prolongement continu de cette fonction en 0
donc elle est faiblement impropre en 0.

$$\text{d'où } \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt \text{ converge.}$$

$$b) t \mapsto \frac{e^{-t}}{t} \in C^0(\mathbb{E}, \mathbb{R})$$

$$\text{Comme } \frac{t^2 e^{-t}}{t} = t e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \quad (\text{par croissances comparées})$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$\text{On a que } \frac{e^{-t}}{t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$$\text{On a aussi } \frac{1}{t^2} \geq 0 \text{ et } \frac{e^{-t}}{t} \geq 0 \text{ pour } t \geq 1$$

donc d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge

$$\text{donc } \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \text{ converge.}$$

3a) soit $a > 0$:

$$t \mapsto \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} \in C^0(\mathbb{R}_+, +\infty)$$

En fait:

$$t^2 \left| \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} \right| = |te^{-t} - te^{-at}| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 - 0 \text{ par croissance comparées}$$

$$\text{donc } \left| \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} \right| = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$$\bullet \left| \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} \right| \geq 0$$

$$\text{if } \frac{1}{t^2} \geq 0$$

donc selon le théorème de comparaison des intégrales
de fonctions positives $\int_2^{+\infty} \frac{e^t - e^{at}}{t} dt$ converge

absolument donc converge.

En c:

En considérant $f(t) = e^{-t} - e^{-at}$

$$\text{On a } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{f'(t)}{1} = f'(0) = a - 1$$

donc f est faiblement impropre en c.

donc $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} dt$ converge.

b) si $a \leq 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left| \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} \right| \sim \frac{e^{-at}}{t}$$

On

non appliqué mais diverge.

③ a) soit $a > 0$:

$$\int_0^n \frac{e^t - e^{-at}}{t} dt = \int_0^n \frac{e^t}{t} dt - \int_0^n \frac{e^{-at}}{t} dt$$

posons le changement de variable affine $u = at$.

$$\text{d'où } du = a dt$$

$$t = n \Leftrightarrow u = an$$

$$t = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

$$= \int_0^{an} \left(\frac{e^{\frac{u}{a}}}{\frac{u}{a}} - e^{-u} \right) \frac{du}{a}$$

$$= \int_0^{an} \frac{e^{\frac{u}{a}}}{u} du - \int_0^{an} \frac{e^{-u}}{u} du$$

$$\int_0^n \frac{e^t - e^{-at}}{t} dt = \int_0^n \left(\frac{(1 - e^{-at})}{t} - (1 - e^t) \right) dt$$

$$= \int_0^n \frac{1 - e^{-at}}{t} dt - \int_0^n \frac{1 - e^t}{t} dt$$

posons le changement de variable affine $u = at$

$$\text{d'où } du = a dt$$

dans la 1^{re} intégrale

$$t = n \Leftrightarrow u = an$$

$$t = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

Numéro d'inscription

0 7 7 1 6



Né(e) le

0 7 / 0 3 / 2 0 0 5

Signature

Nom

B I L L E R O T - - U ' D O N G H U E

Prénom (s)

S A C H A



Épreuve :

Mathématiques approfondies

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0 2

/ 0 6

Numéro de table

0 2

$$\text{donc } \int_c^{an} \frac{1-e^{-u}}{u} du - \int_0^n \frac{1-e^{-t}}{t} dt$$

$$= \int_0^{an} \frac{1-e^{-u}}{u} du + \int_n^0 \frac{1-e^{-t}}{t} dt \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Chasles}$$

$$= \int_n^{an} \frac{1-e^{-u}}{u} du = \left[\ln(u) \right]_n^{an} - \int_n^{an} \frac{e^{-u}}{u} du$$

$$= \ln\left(\frac{an}{n}\right) - \int_n^{an} \frac{e^{-u}}{u} du$$

$$= \ln(a) - \int_n^{an} \frac{e^{-u}}{u} du$$

$$b) G(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} dt$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln(a) - \int_n^{an} \frac{e^{-t}}{t} dt \right)$$

$$= \ln(a) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{an} \frac{e^{-t}}{t} dt = \ln(a) + 0 \quad \text{car} \quad \int_n^{an} \frac{e^{-t}}{t} dt \rightarrow 0 \quad \text{car} \quad n \rightarrow +\infty$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

tant qu'il reste intégrale d'une intégrale convergente (question (b))

donc $G(a) = \ln(a)$

④ posons $u = e^{-t}$ changement de variable et bijection de
donc $du = -e^{-t} dt$
 $[c, +\infty[\rightarrow]0, 1]$.

On a alors que $\int_0^1 \frac{u-1}{\ln(u)} du$ et $\int_0^A \frac{e^{-t}-1}{-t} (-e^{-t}) dt$
sont de mêmes natures et égaux en cas de convergence.

$$\int_0^A \frac{-e^{-2t} + e^{-t}}{-t} dt = \int_0^A \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$$

On voit que cette intégrale est convergente avec $a=2$
selon (2a)
et vaut quand $A \rightarrow +\infty$

$G(2) = \ln(2)$

5) a) On reconnaît une somme de Riemann
 avec $f(x) = x \rightarrow x$ et $a=0$ et $b=1$
 la continue sur $[0,1]$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 x \, dx$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

b) def Rect(m):

$$S = 0$$

for i in range(0, m):

$$i \leq i < m:$$

$$S = S + (i/m - 1) / (m \cdot \log(i/m))$$

else i==0 or i==m:

$$S = S + i/m$$

$$\text{return } (S/m)$$

c) Je reconnais le valeur de $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

alors peut-être fallait-il coder $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

En b) ? Ou je me trompe peut-être et
 j'ai mal compris les questions.

exercice 2,

① a) A est une matrice triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont sur la diagonale

$$\underline{Sp(A) = \{c, 5, 12\}}$$

b) A a 3 valeurs propres distinctes dans un espace de dimension 3 donc A est diagonalisable.

c) On sait d'ailleurs que chaque sous-espace propre de A est de dimension 1.

$$\text{Comme } A \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c \end{pmatrix} = c \text{ alors } \text{Vect}((1, c, c)) \subset \text{Ker}(A)$$

par inclusion et égalité des dimensions

$$\underline{\text{Ker}(A) = \text{Vect}((1, c, c))}$$

$$(A - 5I_3) = \begin{pmatrix} c-5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } (A - 5I_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ c \end{pmatrix} = 0 \text{ Alors de la même façon}$$

Numéro d'inscription

07716



Né(e) le

07 / 03 / 2005

Signature

Nom

BILLET - - OUDON OTHUE

Prénom(s)

JACHA



Épreuve :

mathématiques approfondies

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

03

/ 10

Numéro de table

02

$$\underline{\ker(A - 5I_3) = \ker((1, 1, 1))}$$

$$\text{Enfin } (A - 12I_3) = \begin{pmatrix} -12 & 0 & -2 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{On remarque que } (A - 12I_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{donc } \underline{\ker(A - 12I_3) = \ker((1, 0, -6))}$$

Ainsi on obtient la matrice de passage suivante
entre la base

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

canonique de $M_{3,1}(\mathbb{R})$
et la base de vecteurs
propres B'

Cette matrice est inversible selon
le déterminant et la diagonalisabilité.

et D la matrice diagonale dans cette base B'

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$(2a) \quad y(p_0) = (2x^2 - 1) \times 0 + 5x \times 0 \\ = 0$$

$$y(p_1) = (x^2 - 1) \times 0 + 5x \times 1 \\ = 5x$$

$$\cancel{y(p_2) = (x^2 - 1) \times 2 + 5x(2x)} \\ \cancel{= 2x^2 - 2 + 10x^2} \\ \cancel{= 12x^2 - 2}$$

pour le calcul de 2 à n 3

$$(x^h)' = k(h-1)x^{h-2} \\ \text{et } (x^h)' = h x^{h-1}$$

$$\text{donc } y(p_h) = (x^2 - 1)k(h-1)x^{h-2} + 5x k x^{h-1} \\ = k(h-1)x^h - k(h-1)x^{h-2} + 5k x^h \\ = (k(h-1) + 5k)x^h - k(h-1)x^{h-2}$$

$$= \underline{(k^2 + 4k)n^k - k(k-1)n^{k-2}}$$

b) Notons $P = n^d + \sum_{h=0}^{d-1} \alpha_h n^h$.

P est dérivable en tant que fonction polynomiale
 alors $P'(n) = d n^{d-1} + \sum_{h=1}^{d-1} \alpha_h h n^{h-1}$

et $P''(n) = d(d-1)n^{d-2} + \sum_{h=2}^{d-1} \alpha_h h(h-1)n^{h-2}$

donc $\gamma(P)(n) = \left((n^2 - 1) \left(d(d-1)n^{d-2} + \sum_{h=2}^{d-1} \alpha_h h(h-1)n^{h-2} \right) \right.$

$$\left. + 5n \left(d n^{d-1} + \sum_{h=1}^{d-1} \alpha_h h n^{h-1} \right) \right)$$

$$= d(d-1)n^d + \sum_{h=2}^{d-1} \alpha_h h(h-1)n^h - \left(d(d-1)n^{d-2} \right. \\ \left. + \sum_{h=2}^{d-1} \alpha_h h(h-1)n^{h-2} \right) + 5d n^d + \sum_{h=1}^{d-1} 5\alpha_h h n^h$$

$\leq d-3$
 $\deg \leq d-1$
 $\deg \leq d-2$
 $\deg < d-1$

donc le coefficient dominant de $\gamma(P)$ est

$$\underline{d(d-1) + 5d = d^2 + 4d}$$

et le degré de $\gamma(P)$ est d .

(3a) On suit avec question (2a) que pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à n

$\gamma(p)$ est de degré inférieur ou égal à n .

donc $\gamma(p) \in \mathcal{U}_n(\mathbb{R})$.

De plus soit $(p, \alpha) \in \mathcal{U}_n^2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\gamma(p + \lambda \alpha)(n) &= (n^2 - 1)(p + \lambda \alpha)''(n) + 5n(p + \lambda \alpha)'(n) \\ &\quad \text{par linéarité de la dérivation} \\ &= (n^2 - 1)(p'' + \lambda \alpha'')(n) + 5n(p' + \lambda \alpha')(n) \\ &= (n^2 - 1)p''(n) + 5np'(n) + \lambda((n^2 - 1)\alpha''(n) + 5n\alpha'(n)) \\ &= \underline{\gamma(p)(n) + \lambda \gamma(\alpha)(n)}\end{aligned}$$

donc γ est linéaire.

C'est donc un endomorphisme de $\mathcal{U}_n(\mathbb{R})$.

Numéro d'inscription

07716



Né(e) le

07/03/2005

Signature

Nom

BILLETOT - - O'DONOGHUE

Prénom(s)

SACHA

Épreuve :

Mathématiques

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

09

/ 10

Numéro de table

002

$$b) B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k(k-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^2+4k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -m(m-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m^2+4m \end{pmatrix} \begin{matrix} x^{n-2} \\ \\ \\ x^{n-2} \\ x^n \\ x^n \end{matrix}$$

c) pour tout $k \in \mathbb{C}_0, m \in \mathbb{C}$:

$$x^n \in \mathcal{R}_k[x].$$

On trouve aussi selon (2a) $q(x^k) = k^3 + 4k^k + \mathcal{R}[x]$

donc $\deg(q(x^k)) \leq k$

donc $q(x^k) \in \mathcal{R}_k[x]$

donc $\mathcal{R}_k[x]$ est stable par q .

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$d) \psi(x^0) = 0$$

$$\psi(x) = 5x + 2 = 5x$$

$$\begin{aligned}\psi(x^2) &= 2x^2 - 2 + 5x(2x) \\ &= 12x^2 - 2\end{aligned}$$

$$\text{donc } \text{Mat}_{(1, x^2)}(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = A.$$

$$e) a) \text{ Selon (3, b) } \text{Mat}_{(1, -x^n)}(\psi) = B$$

est ~~la~~ triangulaire supérieure.

donc ses valeurs propres se trouvent sur la diagonale.

$$\text{donc } \text{Sp}(B) = \{k(k+1) \mid k \in \mathbb{Z}_0, m\}$$

(Comme une matrice et son endomorphisme respectif ont les mêmes valeurs propres alors $\text{Sp}(\psi) = \{k(k+1) \mid k \in \mathbb{Z}_0, m\}$)

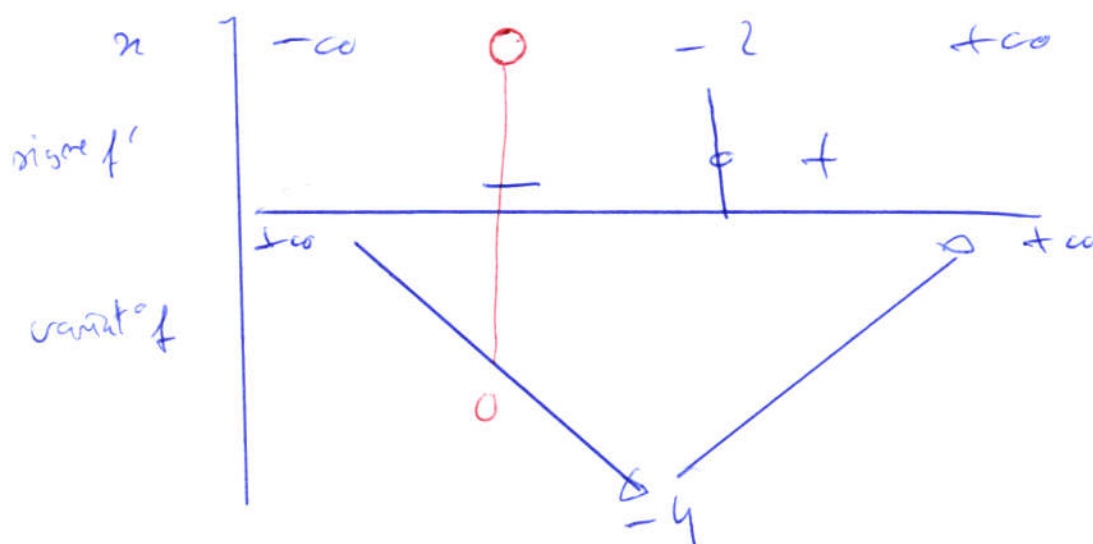
Q 5) posons $\forall n \in \mathbb{Z} \quad f(n) = n(n+4)$

f est dérivable étant que fonction polynomiale.

$$f'(n) = n+4 + n = 2n+4$$

$$\begin{aligned} \text{donc } f'(n) > 0 &\Leftrightarrow 2n > -4 \\ &\Leftrightarrow n > \frac{-4}{2} = -2 \end{aligned}$$

On a donc le tableau de variations suivant :



On s'intéresse donc à l'intervalle $\mathbb{Z}_0, +\infty[$.

f est strictement monotone sur $\mathbb{Z}_0, -2]$ et $[-2, +\infty[$.
de plus f est continue sur $\mathbb{Z}$ tout entier.

donc en vertu du théorème de la bijection.
il existe un unique $n_0 \in \mathbb{Z}_0, +\infty[$ tq $f(n_0) = n(n+4)$
pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Ce résultat étant valide pour ~~tout~~ tout réel.

On a qu'il existe un unique $k_0 \in \mathbb{Z}_0, m\mathbb{Z}$

$$\text{t.q. } f(k_0) = k(k+h) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}_0, m\mathbb{Z}.$$

donc $\forall (k_0, j_0) \in \mathbb{Z}_0, m\mathbb{Z}^2$ t.q. $k_0 \neq j_0$

$$\underline{f(k_0) \neq f(j_0)}$$

$$\Leftrightarrow \underline{k(k+h) \neq j(j+h)}$$

~~donc il existe bien $(n+1)$ valeurs propres~~
(comme $\text{Card}(\mathbb{Z}_0, m\mathbb{Z}) = n+1$ on a bien l'existence de
 $(n+1)$ valeurs propres distinctes.

c) Ainsi γ est diagonalisable car γ admet $(n+1)$
valeurs propres distinctes.

d) pour $k \in \mathbb{Z}_0, m\mathbb{Z}$:

On sait que γ est diagonalisable ^{dans un espace de dimension $(n+1)$} et possède $(n+1)$ valeurs propres distinctes donc ses sous-espaces propres sont chacun de dimension 1.

$$\forall k \in \mathbb{Z}_0, m\mathbb{Z} \\ \text{donc } \text{Ker}(\gamma - (k(k+h))\text{id}_E) = \text{Vect}(G_k)$$

c'est-à-dire, il existe un unique G_k

$$\text{tel que } \gamma(G_k) = k(k+h)G_k.$$

Numéro d'inscription

07716



Né(e) le

07/03/2005

Signature

Nom

BILLET-ROUNGHUE

Prénom(s)

SACHA



Épreuve :

Maths

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

05

10

Numéro de table

002

~~On comme, selon le cours :~~

~~Tout sous-espace propre est stable par φ .~~

~~On a~~

On, selon la question (2b), on a que
pour tout polynôme unitaire de degré inférieur ou égal à k pour le k -ième de $\mathbb{C}_k$, on a

le coefficient dominant ^{ce polynôme par φ} est $k(k+1)$

si on note Q_k polynôme unitaire

on a $\varphi(Q_k) = k(k+1)Q_k$

donc $k_k(\varphi - (k(k+1))\text{id}) = k_k(\varphi)$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

e) comme $\gamma(1) = 0$
et $\gamma(x) = 5x$
alors $G_0 = 1$ et $G_2 = x$.

f) $\gamma(G_2)(n) = (n^2 - 1)2 + 5n(2n)$
 $= 2n^2 - 2 + 10n^2 = 12n^2 - 2$
 $= 12\left(n^2 - \frac{1}{6}\right)$
 $= 12 G_2(n)$

donc $G_2(n) \in \text{Ku}(\gamma - 12\text{id}_E)$.

donc $G_2(n) = n^2 - \frac{1}{6}$

g)

⑤ a) On a par tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$Q(n) = P(-n)$$

Étant dérivable 2 fois comme fonction polynomiale Q , l'est aussi:

$$\underline{Q'(n) = -P'(-n)}$$

$$\text{et } \underline{Q''(n) = P''(-n)}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } Y(Q)(n) &= (n^2 - 1)Q''(n) + 5n Q'(n) \\ &= (n^2 - 1)P''(-n) - 5n P'(-n) \end{aligned}$$

On a comme $Y(P)(n) = k(k+4)P(n)$ par tout $n \in \mathbb{Z}$

$$\text{donc } \underline{Y(P)(-n) = k(k+4)P(-n)}$$

$$\Leftrightarrow k(k+4)P(-n) = (n^2 - 1)P''(-n) - 5n P'(-n)$$

$$\Leftrightarrow \underline{k(k+4)Q(n) = Y(Q)(n)}$$

donc Q est un vecteur propre de Y associé à $k(k+4)$.

c) On sait que si $P(x)$ est vecteur propre de γ alors $P(-x)$ l'est aussi. Considérons $\deg(P) \leq k$.

(comme $\exists$ vecteur propre associé à $k(k+1)$)

On en déduit que $P(x) = \lambda G_k(x)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{donc } P(-x) = \lambda G_k(-x)$$

$$\text{donc } P(-x) = \lambda \left((-x)^k + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j (-x)^j \right)$$

On sait que si $G_k(x)$ est vecteur propre de γ alors

$G_k(-x)$ l'est aussi, donc

$$\underline{G_k(x) = G_k(-x)} \quad \text{car il existe un unique vecteur propre}$$

$$\Leftrightarrow x^k + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j x^j = (-x)^k + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j (-x)^j$$

$$\Leftrightarrow G_k(-x) = \begin{cases} -G_k(x) & \text{si } k \text{ est impair} \\ G_k(x) & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

Numéro d'inscription

0 7 7 1 6



Né(e) le

0 7 / 0 3 / 2 0 0 5

Signature

Nom

B I L L E R O T - - O ' D U N O G H U E

Prénom (s)

S A C H A



Épreuve :

Maths

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0 6

/ 1 0

Numéro de table

0 0 2

$$⑥ \quad \text{On a } t \mapsto p(t) q(t) (1-t^2)^{3/2} \in C^0([-1, 1])$$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$\text{soient } (p, q)^T \in \mathbb{R}_n^3 \subset \mathbb{R}^3 \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} \langle p + \lambda T, q \rangle &= \int_{-1}^1 (p + \lambda T)(t) q(t) (1-t^2)^{3/2} dt \\ &= \int_{-1}^1 p(t) q(t) (1-t^2)^{3/2} dt + \lambda \int_{-1}^1 T(t) q(t) (1-t^2)^{3/2} dt \\ &= \langle p, q \rangle + \lambda \langle T, q \rangle \end{aligned}$$

1. On a donc la linéarité à gauche de $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

$$\text{De plus } \langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t) q(t) (1-t^2)^{3/2} dt = \int_{-1}^1 q(t) p(t) (1-t^2)^{3/2} dt = \langle q, p \rangle$$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$\text{De plus } \langle p, p \rangle = \int_{-1}^1 p^2(t) (1-t^2)^{3/2} dt$$

$$\text{Comme } p^2(t) (1-t^2)^{3/2} \geq 0 \text{ pour } t \in [-1, 1]$$

$$\text{et } p^2(t) (1-t^2)^{3/2} \in C^0([-1, 1])$$

par positivité de l'intégrale $\langle p, p \rangle \geq 0$.

$$\text{Enfin } \langle p, p \rangle = 0 \Rightarrow p^2(t) (1-t^2)^{3/2} = 0$$

$$\text{car } p^2(t) (1-t^2)^{3/2} \geq 0 \text{ et } p^2(t) (1-t^2)^{3/2} \in C^0([-1, 1])$$

$$\text{Ainsi comme pour } t \in]-1, 1[\quad (1-t^2)^{3/2} \neq 0$$

$$\text{on a } p^2(t) = 0 \text{ c\`ad } p(t) = 0$$

donc ~~p~~ p admet une infinité de racines
donc $p = 0$

donc ~~$\langle \cdot, \cdot \rangle$~~ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est positif et défini.

C'est donc un produit scalaire.

→ donc $dt = \cos(s) ds$

⑦ a) posons $t = \sin(s)$ changement C' bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans $[-1, 1]$.

Comme

$t \mapsto (1-t^2)^{3/2} \in C^0([-1, 1])$, on peut écrire

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^{3/2} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\sin^2(s))^{3/2} \cos(s) ds$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2(s))^{3/2} \cos(s) ds$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3(s) \cos(s) ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4(s) ds$$

b) pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$c) \|G_0\|^2 = \|2u\|^2$$

$$= \int_{-1}^1 (1-t^2)^{3/2} dt$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4(\theta) d\theta \quad (\text{⑦ a})$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{8} (\cos(4\theta) + \cos(2\theta) + 3) d\theta$$

$$= \frac{1}{8} \left(\left[\frac{1}{4} \sin(4\theta) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + 4 \times \left[\frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + 3\pi \right)$$

$$= \frac{1}{8} \left(\left(\frac{1}{4} \sin(2\pi) - \frac{1}{4} \sin(-2\pi) \right) + 4 \times \left(\frac{1}{2} \sin(\pi) - \frac{1}{2} \sin(-\pi) \right) + 3\pi \right)$$

$$= \frac{1}{8} \left(\left(\frac{2}{4} \sin(2\pi) + 4 \sin(\pi) + 3\pi \right) \right) \quad \text{par imparité de } \sin(\cdot)$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} \sin(2\pi) + 0 + 3\pi \right) = \frac{1}{8} \left(\frac{2}{2} \sin(\pi) \cos(\pi) + 3\pi \right)$$

$$= \frac{3}{8} \pi$$

⑧ a) Soit $f \in \mathcal{C}_m^1 \times \mathbb{R}$:

posons :

$$g(t) = f'(t) (1-t^2)^{5/2}$$

cette fonction est dérivable autant qu'on veut et composée

Numéro d'inscription

07716



Né(e) le

07/03/2005

Signature

Nom

BILLETOT - - CORDON GHOE

Prénom(s)

SACHA



Épreuve :

Maths

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

07

/ 10

Numéro de table

002

de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned}
 g'(t) &= p''(t)(1-t^2)^{5/2} - 2tp'(t) \times \frac{5}{2} (1-t^2)^{3/2} \\
 &= p''(t)(1-t^2)^{5/2} - 5tp'(t)(1-t^2)^{3/2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \langle Y(p), Q \rangle &= \int_{-1}^1 ((t^2-1)p''(t) + 5tp'(t)) Q(t)(1-t^2)^{3/2} dt \\
 &= \int_{-1}^1 -((1-t^2)p''(t) - 5tp'(t)) Q(t)(1-t^2)^{3/2} dt \\
 &= \int_{-1}^1 -((1-t^2)^{5/2} p''(t) - 5tp'(t)(1-t^2)^{3/2}) Q(t) dt
 \end{aligned}$$

On a $t \mapsto g(t)$ et $t \mapsto Q(t) \in C^1$ sur $[-1, 1]$

donc par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}
 &[g(t)Q(t)]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 g(t)Q'(t) dt \\
 &= -g(1)Q(1) + g(-1)Q(-1) + \int_{-1}^1 p'(t)Q'(t)(1-t^2)^{5/2} dt
 \end{aligned}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$= 0 + \int_{-1}^1 P'(t) Q'(t) (1-t^2)^{5/2} dt.$$

c) On obtient en faisant de la même manière par $\langle Y(Q), P \rangle$

$$\text{que } \langle Y(Q), P \rangle = \langle Y(P), Q \rangle$$

donc Y est symétrique.

d) Comme Y est symétrique, on sait que

il existe une base orthogonale de vecteurs propres

les $(v_0, \dots, v_n)$ sont les uniques vecteurs propres

de Y , on sait qu'ils sont 2 à 2 orthogonaux.

donc cette famille est orthogonale

De plus $\text{Card}(v_0, \dots, v_n) = n+1 = \dim \mathcal{R}_n[X]$

et comme, ils sont tous non-nuls comme ceux
sont des vecteurs propres, on sait que cette famille
orthogonale est libre. Donc $(v_0, \dots, v_n)$ est une
base de $\mathcal{R}_n[X]$.

e) On a que $(G_0 - G_{n-1})$ forme une base de $\mathcal{H}_{n-1}[X]$

cette famille est orthogonale selon la question précédente.

donc on ~~la~~ complète cette base en une base de $\mathcal{H}_n[X]$

On a que $\langle G_n, G_j \rangle = 0$ pour $j \in [0, n-1]$

En effet si $(G_0 - G_n)$ est orthogonale

alors G_n est orthogonale à tout vecteur de la famille.

2a) Soient $(P, Q, R) \in \mathcal{H}_m^3[X]$

$$\begin{aligned}\langle PQ, R \rangle &= \int_{-1}^1 (PQ(t) R(t) (1-t^2)^{3/2}) dt \\ &= \int_{-1}^1 P(t) Q(t) R(t) (1-t^2)^{3/2} dt \\ &= \int_{-1}^1 P(t) (Q \cdot R)(t) (1-t^2)^{3/2} dt \\ &= \underline{\langle P, Q \cdot R \rangle}\end{aligned}$$

b) On sait avec (2a) que $(G_0 - G_n)$ forment une base de $\mathcal{H}_n[X]$

donc $\forall P \in \mathcal{H}_d[X], \exists! (\alpha_0 - \alpha_d) \in \mathcal{H}_n^{d+1}$

$$\text{tg } P = \sum_{k=0}^d \alpha_k G_k.$$

~~(comme nous avons un résultat plus fort qu'en (8d) qui dit que cette base de vecteurs propres est orthogonale comme Y est symétrique (théorème spectral))~~

on a selon le cas que

$$\langle p, G_i \rangle = \sum_{n=0}^d \lambda_n \langle G_n, G_i \rangle$$

$$= \lambda_i \langle G_i, G_i \rangle \text{ car } \langle G_n, G_i \rangle = 0 \text{ pour } n \neq i$$

donc par ailleurs de (7c, d) $\lambda_i = \frac{\langle p, G_i \rangle}{\|G_i\|^2}$

$$\text{donc } p = \sum_{i=0}^d \frac{\langle p, G_i \rangle}{\|G_i\|^2} G_i$$

Numéro d'inscription

07716



Né(e) le

07/03/2005

Signature

Nom

BILLET-OT - C' DUNOGLUE

Prénom(s)

SACHA



Épreuve :

Math

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

05

10

Numéro de table

002

Problème :Point I :soit $n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$

$$a) \sum_{k=1}^n x^k = x \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$$b) (1-x)^2 \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \sum_{k=1}^n kx^{k-1} - 2 \sum_{k=1}^n kx^k + \sum_{k=1}^n kx^{k+1}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^n kx^{k-1} - \sum_{k=1}^n kx^k + \sum_{k=1}^n kx^{k+1} - \sum_{k=1}^n kx^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)x^k - \sum_{k=1}^n kx^k + \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)x^k - \sum_{k=1}^n kx^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1-k)x^k - nx^n + \sum_{k=2}^{n+1} (k-1-k)x^k - x^{n+1} + (n+1)x^{n+1} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} x^k - \sum_{k=2}^{n+1} x^k - n - nx^n + (n+1)x^{n+1}$$

$$= 1 + x - x^n - x^{n+1} - n - nx^n + (n+1)x^{n+1}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$= 1 + n^n(-n-1) + n n^{n+1} \pi$$

$$\text{donc } \sum_{n=1}^{\infty} h_n^{k-1} = \frac{n n^{n+1} - n^n (n+1) + 1}{(1-n)^2}$$

c) Υ ~~compte le~~ représente le rang du 1^{er} succès
où le d domine une face non nulle.

$$\text{donc } \Upsilon \text{ co geom } \left(\frac{d}{d+1} \right)$$

En effet, à chaque lancer du dé, il y a d possibilités
d'avoir une face non nulle sur (d+1) possibilités tout est.

$$\text{donc } E[\Upsilon] = \frac{d+1}{d} \quad | \quad V[\Upsilon] = \frac{1 - \frac{d}{d+1}}{\left(\frac{d}{d+1}\right)^2} = \frac{\frac{1}{d+1}}{\frac{d^2}{(d+1)^2}} = \frac{d+1}{d^2}$$

$$d/ \quad \mathbb{P}(X > n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \bar{Z}_i\right) \quad \text{à } \bar{Z}_i = \text{"pas de succès sur la face nulle au i-ème lancer"}$$

Ces événements sont indépendants, on a :

$$= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\bar{Z}_i) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{d+1} \right) = \left(\frac{1}{d+1} \right)^n$$

③ a) $\exists x \{ \sum_{k=n}^{\infty} k \mathbb{P}(X=k) \}$ existe oï

$$\sum_{k=n}^{\infty} k \mathbb{P}(X=k) \text{ converge.}$$

On X sachant que $\{Y > n\}$ prend forcément la valeur n en effet, cela veut dire que durant les n premiers tours on a obtenu n faces nulles.

$$\text{donc } \mathbb{E}[X | Y > n] = n \mathbb{P}(X=n)$$

$$= n \left(\frac{1}{d+1} \right)^n$$

b) pour i allant de $\{1, n\}$:

$$\mathbb{E}[X | \{Y=i\}] \stackrel{\text{existence}}{=} \sum_{k=n}^{\infty} k \mathbb{P}_{\{Y=i\}}(X=k) \text{ converge}$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} k \times \left(\frac{1}{d+1} \right)^{i-1} \left(\frac{d}{d+1} \right)$$

exists $\checkmark$

$$\textcircled{3} a) \theta(x) \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}(x=i) \theta(x | \{i=i\}) \text{ converge}$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{d+1} \right)^{i-1} \left(\frac{d}{d+1} \right) (1 + \theta(x))$$

$$+ \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{d+1} \right)^{i-1} \frac{d}{d+1}$$

$\theta(x)$ exists if $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}(x=i) \theta(x | \{i=i\})$ converge

$$= \sum_{i=1}^n \mathbb{1}(x=i) (1 + \theta(x)) + \mathbb{1}(x > n) \theta(x | \{x > n\})$$

$$= \sum_{i=1}^n \mathbb{1}(x=i) (1 + \theta(x)) + \mathbb{1}(x > n) \left(n \left(\frac{1}{d+1} \right)^n \right)$$

Numéro d'inscription

07716



Né(e) le

07 / 03 / 2005

Signature

Nom

BILLET - - - - - DUNOGHUE

Prénom(s)

JACQUES



Épreuve :

Maths

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

09

/ 10

Numéro de table

002

Partie II :④ par fait $m \in \mathbb{N}^*$:

$$U_m \sim \mathcal{U}(\Pi_0, d\mathbb{J})$$

donc pour $k \in \Pi_0, d\mathbb{J}$

$$\mathbb{P}(U_m = k) = \frac{1}{d+1}$$

$$\mathbb{P}(U_m = k) = \frac{d}{2}$$

⑤ a) $S_2(\Omega) = \Pi_0, 2d\mathbb{J}$.b) pour $k \in S_2(\Omega)$: on a selon la formule des probabilités totales, le long du $S \in \{U_1 = i\}$ avec $i \in \Pi_0, d\mathbb{J}$.

$$\mathbb{P}(S_2 = k) = \sum_{i=0}^d \mathbb{P}(U_1 = i) \times \mathbb{P}(S_2 = k | U_1 = i)$$

$$= \sum_{i=0}^d \mathbb{P}(U_1 = i) \mathbb{P}(U_2 = k - i) \quad \text{par indépendance entre } U_1 \text{ et } U_2$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

c) pour $k \in S_2(\Omega)$:
si $0 \leq k < d$:

$$\mathbb{P}(S_2 = k) = \sum_{i=0}^k \mathbb{P}(U_1 = i) \mathbb{P}(U_2 = k-i)$$

$$= \sum_{i=0}^k \frac{1}{(d+1)^2} = \frac{k+1}{(d+1)^2}$$

si $k \geq d$:

$$\mathbb{P}(S_2 = k) = \sum_{i=k}^{2d} \mathbb{P}(U_1 = i) \mathbb{P}(U_2 = k-i)$$

$$= \frac{2d-k+1}{(d+1)^2}$$

~~8/5/2/7/2/~~

⑥ def $\text{Attkumbe}(d)$:

b) def $\text{Eopt}(d, N)$:

$E = 0$

for k in range (N) :

$E = \text{Attkumbe}(d) + E$

return $E / N * E$

m

c) $\{E, T\}$ converge vers e .

$$\text{Ga)} \quad \sum_{i=1}^N i \mathbb{Q}(v \geq i) \doteq \sum_{i=1}^N i (\mathbb{Q}(v \geq i) - \mathbb{Q}(v \geq i+1))$$

$$= \sum_{i=1}^N i \mathbb{Q}(v \geq i) - \sum_{i=1}^{N+1} \mathbb{Q}(v \geq i) \quad (\text{on posant } i=j+1)$$

$$= \sum_{i=1}^N i \mathbb{Q}(v \geq i) - N \mathbb{Q}(v \geq N+1)$$

$$\text{donc } \sum_{i=1}^N i \mathbb{Q}(v \geq i) = \sum_{i=1}^N i \mathbb{Q}(v \geq i) + N \mathbb{Q}(v \geq N+1)$$

b) On a $\sum_{n=1}^N \mathbb{Q}(V \geq n) \geq 0$

donc $\sum_{n=1}^N \mathbb{Q}(V \geq n) \geq \sum_{i=1}^N \mathbb{Q}(V=i) \geq 0$

Comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{Q}(V \geq n)$ converge alors par domination

$\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{Q}(V=i) = \mathbb{E}[V]$ converge et existe.

$\mathbb{P}(V \geq N+1) = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbb{Q}(V=k)$

$\sum_{k=N+1}^{+\infty} k \mathbb{Q}(V=k) \rightarrow 0$ as $N \rightarrow +\infty$

On voit que reste d'une série convergente car $\mathbb{E}[V]$ existe.

donc par encadrement $\lim_{N \rightarrow +\infty} N \mathbb{P}(V \geq N+1) = 0$

d) donc dans a)
on peut écrire

$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{Q}(V \geq n) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{Q}(V=i) + 0$
car $N \mathbb{P}(V \geq N+1) \rightarrow 0$

c'est-à-dire $\mathbb{E}[V] = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{Q}(V \geq n)$

Numéro d'inscription

07716



Né(e) le

07/03/2005

Signature

Nom

RILEY - CRONOUKUE

Prénom(s)

SACHA

Épreuve : Maths

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

10

/ 10

Numéro de table

002

Partie II :

$$S_1 = U_1$$

$$a) f_{S_1}(t) = \frac{1}{d} \frac{1}{\epsilon_0 d} (t)$$

$$EC_{S_1} = EC_{U_1} = \frac{d}{2}$$

$$VC_{S_1} = VC_{U_1} = \frac{d^2}{12}$$

$$b) S_2 = U_1 + U_2$$

Les 2 VAR sont indépendantes et $|f_{S_1}(t)| \leq 2$ donc $f_1(n)$ existe et vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) f_{U_2}(n-t) dt$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{d} \frac{1}{\epsilon_0 d} (t) \frac{1}{d} \frac{1}{\epsilon_0 d} (n-t) dt$$

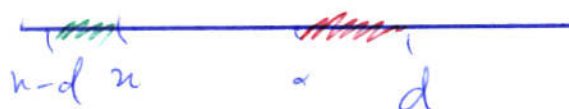
$$On \frac{1}{\epsilon_0 d} (t) \frac{1}{\epsilon_0 d} (n-t) = 0 \text{ si } n \in]-\infty, 0[\\ \text{ou } n \in [d, +\infty[$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

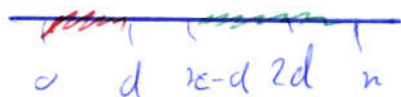
En effet: cas:

si $n \leq d$:



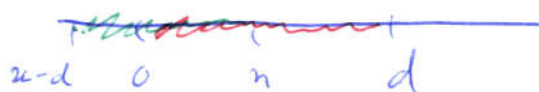
$$\text{donc } \mu_{[n-d, n] \cap [0, d]}(t) = 0$$

si $n > 2d$:



$$\text{donc } \mu_{[0, d] \cap [n-d, n]}(t) = 0$$

c) donc $\forall n \in [0, d]$



$$\mu_{[n-d, n] \cap [0, d]}(t) = \mu_{[0, n]}(t)$$

also $f_2(n) = \int_0^n \frac{1}{d^2} dh$

d) $f_2(n) = \frac{n}{d^2}$] partiel n. Eu^2 .

~~Q. 6 (7-1)~~

