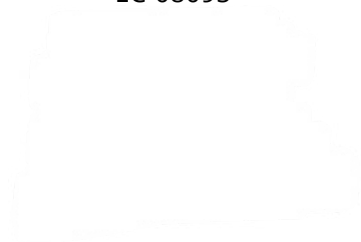


EC-08095



Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription

08095



Né(e) le

07 / 06 / 2005

Nom

Prénom(s)

Signature

Valu

Ecricome

Épreuve : Mathématiques

Sujet



1

ou



2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille



01

/

09

Numéro de table



76

Exercice 1

- 1) * L'expérience consiste à choisir une compagnie au hasard (avec équiprobabilité) parmi n compagnies
 * la variable aléatoire X prend le numéro de l'issue choisie

Donc $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$

Autrement dit :

- $X(\omega) = \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$
- $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n}$
- $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$
- $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

2) * $Y(\omega) = \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$

- * Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Supposons $(X=k)$ réalisé. Alors, on choisit au hasard une compagnie parmi les k compagnies au moins avec les notes de celle choisie l'année précédente.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

Par équi probabilité au choix des boules,

$$\forall j \in \{1; n\} \quad P((Y=j) \mid (X=k)) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } j \in \{1; k\} \\ 0 & \text{si } j > k \end{cases}$$

Or, pour tout $j \in \{1; n\}$, comme $P((X=k)) \neq 0$,

$$\begin{aligned} P((X=k) \cap (Y=j)) &= P((X=k)) P((Y=j) \mid (X=k)) \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Conclusion:

$$\forall (j, k) \in \{1; n\}^2 \quad P((X=k) \cap (Y=j)) = \begin{cases} \frac{1}{nk} & \text{si } j \in \{1; k\} \\ 0 & \text{si } j \geq k+1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{1}{j} &= \sum_{1 \leq k \leq j \leq n} \frac{1}{j} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \frac{1}{j} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j 1 \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{j}{j} \\ &= n \end{aligned}$$

Conclusion

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{1}{j} = n$$

4) Soit $k \in \{1, n\}$

D'après la formule des probabilités totales,
avec $((X=j))_{j \in \{1, n\}}$ comme système complet
d'événements,

$$\begin{aligned}
 P(Y=k) &= \sum_{j=1}^n P((X=j) \cap (Y=k)) \\
 &= \sum_{j=k}^n P((X=j) \cap (Y=k)) \quad \downarrow \begin{array}{l} \forall j \leq k-1, P((X=j) \cap (Y=k)) = 0 \\ \text{d'après 2)} \end{array} \\
 &= \sum_{j=k}^n \frac{1}{nj} \quad \downarrow \text{q. 2)} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{j=k}^n \frac{1}{j}
 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\forall k \in \{1, n\}, P(Y=k) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^n \frac{1}{j}$$

$$\begin{aligned}
 5) a) \quad \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{k}{j} &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \frac{k}{j} \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j k \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2} \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{j+1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j+1)
 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{k}{j} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j+1)$$

5)b) $Y(\omega) = (T, n)$ donc Y admet une espérance (car $Y(\omega)$ fini) et

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \sum_{k=1}^m k \mathbb{P}(Y=k) \\
 &= \sum_{k=1}^m k \times \frac{1}{n} \sum_{j=k}^m \frac{1}{j} \quad \checkmark \text{ q.u.)} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m \sum_{j=k}^m \frac{k}{j} \quad \checkmark \text{ 5)a)} \\
 &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (j+1) \\
 &= \frac{1}{2n} \left(\sum_{j=1}^m j + \sum_{j=1}^m 1 \right) \\
 &= \frac{1}{2n} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) \\
 &= \frac{n+1}{4} + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{n+1+2}{4} \\
 &= \frac{n+3}{4}
 \end{aligned}$$

Conclusion : Y admet une espérance, et $E(Y) = \frac{n+3}{4}$.

6)a) $X(\omega)$ et $Y(\omega)$ sont bornés, donc XY admet une espérance, et par théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}
 E(XY) &= \sum_{(k,j) \in \{1,n\}^2} k_j \mathbb{P}(X=j \cap Y=k) \\
 &= \sum_{1 \leq k \leq j \leq n} k_j \mathbb{P}(X=j \cap Y=k) \quad \checkmark \text{ d'après 2)} \\
 &\quad \text{car } \forall k \geq j+1, \mathbb{P}(X=j \cap Y=k) = 0
 \end{aligned}$$

Numéro d'inscription

08095



Né(e) le

07 / 06 / 2005

Nom

Prénom (s)

Signature

Valta

Ecricome

Épreuve :

Mathématique

Sujet

☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

02 / 09

Numéro de table

46

$$\begin{aligned}
 E(XY) &= \sum_{1 \leq k \leq j \leq n} k_j \times \frac{1}{m_j} \quad (\downarrow q.2) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j k \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{j(j+1)}{2} \\
 &= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n j(j+1)
 \end{aligned}$$

Conclusion : XY admet une espérance et $E(XY) = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n j(j+1)$

6)b) D'après ce qui précède,

$$\begin{aligned}
 E(XY) &= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n j(j+1) \\
 &= \frac{1}{2n} \left(\sum_{j=1}^n j^2 + \sum_{j=1}^n j \right) \\
 &= \frac{1}{2n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6} \right)
 \end{aligned}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$\begin{aligned} E(XY) &= \frac{2(n+1)(n+2)}{2 \times 6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{6} \end{aligned}$$

Conclusion : $E(XY) = \frac{(n+1)(n+2)}{6}$.

6x) Par formule de Koenig-Huygens, comme XY admet une espérance,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \quad \downarrow \begin{array}{l} : 6) a) \\ : 1) \\ : 5) b) \end{array} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{6} - \frac{n+1}{2} \times \frac{n+3}{4} \\ &= \frac{(n+1)(4(n+2) - 3(n+3))}{24} \\ &= \frac{(n+1)(4n+8-3n-9)}{24} \\ &= \frac{(n+1)(n-1)}{24} \\ &= \frac{n^2-1}{24} \end{aligned}$$

Conclusion : $\text{Cov}(X, Y)$ existe et $\text{Cov}(X, Y) = \frac{n^2-1}{24}$.

7) Remarquons que :

$$+ P(X=1 \cap Y=2) = 0 \quad (\text{d'après 2})$$

$$+ P(X=1)P(Y=2) \neq 0 \quad \text{car } P(X=1) \neq 0 \text{ et } P(Y=2) \neq 0$$

$$\text{Donc } P(X=1 \cap Y=2) \neq P(X=1)P(Y=2)$$

Conclusion : X et Y ne sont pas indépendants.

8)a) def simulXY(n) :

$$X = \text{rd.rdnorm}(1, n+1)$$

8)b)

3)a) A_n est réalisable, ssi, les particularités ont la même compagnie des années consécutives

ssi, $(X=Y)$ est réalisable.

Donc $A_n = (X=Y)$.

3)b) D'après la formule des probabilités totales, avec $((X=j))_{j \in \{1, \dots, n\}}$ comme système complet d'événements,

$$\begin{aligned} P(A_n) &= \sum_{j=1}^n P((X=j) \cap (X=Y)) \\ &= \sum_{j=1}^n P((X=j) \cap (Y=j)) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{n_j} \quad \downarrow \text{ q 2)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \end{aligned}$$

Conclusion : $P(A_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$.

3)c) Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

On a :

$$\forall t \in [j, j+1], \quad j \leq t \leq j+1$$

Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^+$,

$$\forall t \in [j, j+1], \quad \frac{1}{j+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{j}$$

Numéro d'inscription

0	8	0	9	5	
---	---	---	---	---	--



Né(e) le

0	7	/	0	6	/	2	0	0	5
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Nom

Prénom (s)

Signature

Keth

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



Épreuve :

mathématique

Sujet

☐

1

ou

☐

2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Feuille

☐

3

/

☐

9

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Numéro de table

☐

7

/

☐

6

Par l'usage de l'intégrale, écrire pour $j+1 \geq j$
et les fonctions en fait continues sur $(j, j+1)$,

$$\int_j^{j+1} \frac{1}{j+1} dt \leq \int_j^{j+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_j^{j+1} \frac{1}{j} dt.$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } \int_j^{j+1} \frac{1}{j+1} dt &= \frac{1}{j+1} \int_j^{j+1} 1 dt \\ &= \frac{1}{j+1} [t]_j^{j+1} \\ &= \frac{1}{j+1} \end{aligned}$$

$$\int_j^{j+1} \frac{1}{j} dt = \frac{1}{j}$$

$$\begin{aligned} \int_j^{j+1} \frac{1}{t} dt &= [\ln(t)]_j^{j+1} \\ &= \ln(j+1) - \ln(j). \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{j+1} \leq \ln(j+1) - \ln(j) \leq \frac{1}{j}.$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

9)a) * Inégalité de droite.

D'après 9)c), pour tout $j \in \mathbb{N}^+$,

$$\frac{1}{j+1} \leq \ln(j+1) - \ln(j)$$

En sommant de 1 à $n-1$,

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j+1} \leq \sum_{j=1}^{n-1} (\ln(j+1) - \ln(j))$$

D'où :

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - 1 \leq \ln(n)$$

Puis,

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \leq 1 + \ln(n)$$

Enfin, comme $\frac{1}{n} > 0$,

$$\underbrace{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}}_{p(A_n)} \leq \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n}$$

* Inégalité de gauche

D'après 9)c), pour tout $j \in \mathbb{N}^+$,

$$\ln(j+1) - \ln(j) \leq \frac{1}{j}$$

En sommant de 1 à n ,

$$\sum_{j=1}^n \ln(j+1) - \ln(j) \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$$

D'où :

$$\ln(n+1) - \ln(1) \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$$

Ainsi, comme $\frac{1}{n} > 0$,

$$\frac{\ln(n+1)}{n} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$$

Donc, $\frac{\ln(n+1)}{n} \leq P(A_n)$ (d'après 9)b))

Conclusion :

$$\frac{\ln(n+1)}{n} \leq P(A_n) \leq \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n}.$$

9)c) Pour n au voisinage de $+\infty$, on a d'après 9)b),

$$\frac{\ln(n+1)}{n} \leq P(A_n) \leq \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n}$$

D'où, comme $\frac{\ln(n)}{n} > 0$

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{P(A_n)}{\frac{\ln(n)}{n}} \leq \frac{1}{\ln(n)} + 1$$

$$\text{Or, } \checkmark \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(n)} + 1 = 1 \quad \text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0$$

$$\checkmark \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 \quad \text{car } \ln(n+1) \sim \ln(n)$$

Donc par encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(A_n)}{\frac{\ln(n)}{n}} = 1$$

Conclusion : $IP(A_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$

10)a) `SELECT COUNT (*) FROM adherent
WHERE id-2025 = id-2026`

10)b) Cette commande crée une table contenant pour chaque adhérent son numéro personnel de l'identifier et le nom de sa compagnie d'assurance.

10)c) `SELECT AVG note
FROM avis
WHERE compagnie = 1`

10)d) `SELECT (*) FROM moyenne
ORDER BY note DESC`

Numéro d'inscription

0	8	0	9	5	
---	---	---	---	---	--



Né(e) le

0	7	/	0	6	/	2	0	0	5
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Signature

Nom

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Prénom (s)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



Épreuve :

Mathématiques

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0	4
---	---

/	0	9
---	---	---

Numéro de table

0	7	6
---	---	---

Exercice 2

PARTIE I

1) f est définie sur $] -\infty; 1[$.

2) $+$ En $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x)$$

$$= -\infty$$

$+$ En 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$= +\infty$$

$$\checkmark \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} = +\infty$$

Conclusion : $+$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$+$ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

3) f est dérivable sur $] -\infty; 1[$ comme composée de fonctions dérivables sur les intervalles adjacents et pour tout $x \in] -\infty; 1[$,

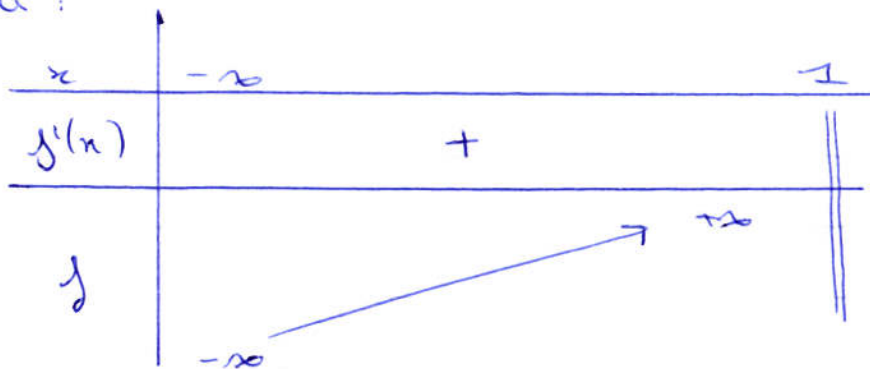
$$f'(x) = \frac{-\frac{-1}{(1-x)^2}}{\frac{1}{1-x}}$$

$$= \frac{1-x}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{1-x}$$

$$> 0 \quad \text{car } x \in] -\infty; 1[$$

D'où :



4)a) Pour x au voisinage de 0,

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$= \ln\left(1 + \frac{x}{1-x}\right)$$

$$\text{Et comme } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-x} = 0,$$

$$f(x) = \frac{x}{1-x} + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \times \frac{1}{2} + o\left(\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\right)$$

Conclusion : Pour x au voisinage de 0,

$$f(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + o\left(\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\right)$$

u) b) Pour x au voisinage de 0,

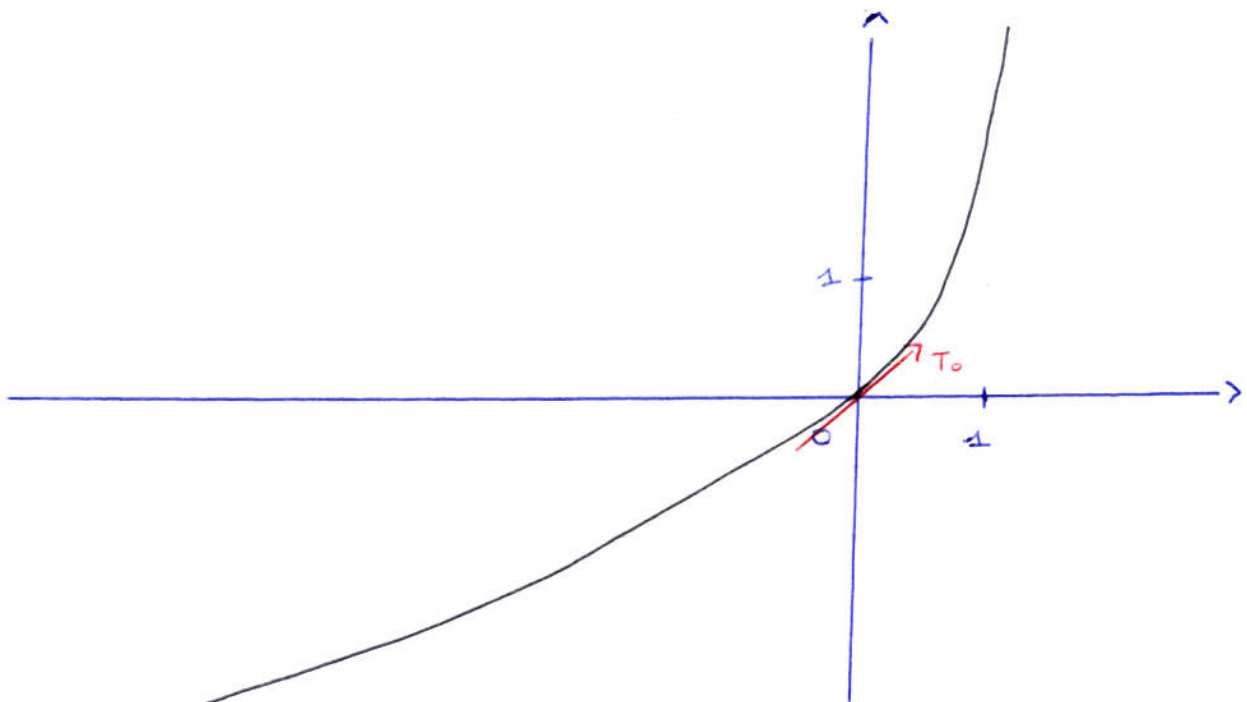
$$f(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + o\left(\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\right)$$

$$\sim x$$

Donc une équation de la tangente à $E_{f,0}$ est : $y = x$.

Et la courbe de f est au dessus de la tangente au voisinage de 0.

5) D'après ce qui précède, on a



PARTIE II

6)a) La série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ est une série de Riemann divergente.

6)b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} S_{n+1}(1) - S_n(1) &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{n+1} \\ &> 0 \quad \text{car } n > 0 \end{aligned}$$

Donc $(S_n(1))$ est strictement croissante.

6)c) La suite $(S_n(1))$ est

- ✓ croissante (6)b)
- ✓ non majorée (car $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ diverge)

Donc par théorème de convergence monotone,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(1) = +\infty$$

7) Pour tout $x \in]-1, 1[$,

Numéro d'inscription

0	8	0	9	5	
---	---	---	---	---	--



Né(e) le

0	7	/	0	6	/	2	0	0	5
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Signature

Nom

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Prénom (s)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



Épreuve :

Mathématiques

Sujet

☐

1

ou

☐

2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

☐

0

5

☐

3

Numéro de table

☐

0

7

☐

6

8) a) * Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_{2(n+1)+1} - S_{2n}(-1) = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}$$

$$= \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2}$$

$$= \frac{-1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$= -\frac{2n-2+2n+1}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$= -\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

< 0

Donc $(S_{2n}(-1))$ est décroissante.

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_{2(n+1)+1}(-1) - S_{2n+1}(-1) = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k}$$

$$= \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2}$$

$$= \frac{-1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$S_{2(n+1)+1}(-1) - S_{2n+1} = -\frac{2n-2+2n+3}{(2n+2)(2n+3)}$$

$$= \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$$

$$> 0$$

Donc $(S_{2n+1}(-1))$ est croissante.

$$\begin{aligned} \text{+ Pour } n \text{ au voisinage de } +\infty, \quad S_{2n}(-1) - S_{2n+1}(-1) &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} \\ &= -\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}(-1) - S_{2n+1}(-1) = 0.$$

On a donc :

- ✓ $(S_{2n+1}(-1))$ croissante
- ✓ $(S_{2n}(-1))$ décroissante
- ✓ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}(-1) - S_{2n+1}(-1) = 0$

Donc $(S_{2n}(-1))$ et $(S_{2n+1}(-1))$ sont adjacentes.

8)b) les suites $(S_{2n}(-1))$ et $(S_{2n+1}(-1))$ sont adjacentes (8)a) donc elle convergent et ont la même limite.

Donc $(S_{2n}(-1))$ est convergente.

8)c) D'après 8)a), $S_{2n}(-1)$ et $S_{2n+1}(-1)$ sont adjacentes, donc elles convergent et ont la même limite.

Or, d'après 8)b),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(-1) = -\ln(2).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}(-1) &= -\ln(2) \\ \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1}(-1) &= -\ln(2) \end{aligned}$$

Or, $S_{2n+1}(-1)$ est croissante,

d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, S_{2n+1}(-1) \leq -\ln(2)$$

Puis,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^+, |S_{2n}(-1) - S_{2n+1}(-1)| &\geq |\ln(2)| + |S_{2n}(-1)| \\ &\geq |\ln(2) + S_{2n}(-1)| \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^+, S_{2n}(-1) - S_{2n+1}(-1) &= |S_{2n}(-1) - S_{2n+1}(-1)| \\ &\geq |S_{2n}(-1)| - |S_{2n+1}(-1)| \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, S_{2n}(-1) - S_{2n+1}(-1) \geq |\ln(2) + S_{2n}(-1)|$$

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^+$. D'après 8) c),
 $| \ln(2) + S_{2n}(-1) | \leq S_{2n}(-1) - S_{2n+1}(-1)$

$$\text{Or, } S_{2n}(-1) - S_{2n+1}(-1) = \frac{1}{2^{n+1}} \\ \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{car } n \geq 1$$

Pour conclure, on a :

$$| \ln(2) + S_{2n}(-1) | \leq \frac{1}{2^n}$$

Conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ \quad | \ln(2) + S_{2n}(-1) | \leq \frac{1}{2^n}.$$

3) a) Soit $x > 1$

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, \quad \frac{x^n}{n} \geq \frac{1}{n}$$

$$\forall \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{divgente} \quad (6) a)$$

Donc par critère de comparaison par
 inégalité,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \text{ est } \text{divgente}$$

Conclusion : $\forall x > 1, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ est divergente.

Numéro d'inscription

0	8	0	9	5	
---	---	---	---	---	--



Né(e) le

0	7	/	0	6	/	2	0	0	5
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Signature

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Nom

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Prénom (s)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



Épreuve :

maths

Sujet

☐

1

ou

☐

2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

☐

06

/

☐

09

Numéro de table

☐

76

9) b) D'après ce qui précède,

$$\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k} \text{ est divergente.}$$

$$\text{or, } \forall n \in \mathbb{N}^+ \quad \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = +\infty$$

PARTIE III

10) a) Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ et $t \mapsto \frac{1}{(1-t)^2}$ sont continues sur $[0, a]$ (ou $(a, 0)$) donc bien intégrables et :

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{1}{1-t} dt &= \left[-\ln(1-t) \right]_0^a \\ &= -\ln(1-a) + \ln(1) \end{aligned}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$\begin{aligned} * \int_0^a \frac{1}{(1-t)^2} dt &= \left[\frac{1}{1-t} \right]_0^a \\ &= \frac{1}{1-a} - 1 \end{aligned}$$

Conclure :

$$* \int_0^a \frac{1}{1-t} = -\ln(1-a)$$

$$* \int_0^a \frac{1}{(1-t)^2} = \frac{1}{1-a} - 1$$

(b) b) On a d'après l'énoncé :

$$* f(a) = \ln\left(\frac{1}{1-a}\right)$$

$$* R_1(a) = \int_0^a \frac{a-t}{(1-t)^2} dt.$$

On a que :

$$R_1(a) = \int_0^a \frac{a-t}{(1-t)^2} dt$$

$$= \int_0^a \frac{(a-1) + (1-t)}{(1-t)^2} dt$$

$$= \int_0^a \frac{a-1}{(1-t)^2} dt + \int_0^a \frac{1-t}{(1-t)^2} dt \quad \text{Chasles}$$

$$= a-1 \int_0^a \frac{1}{(1-t)^2} dt + \int_0^a \frac{1}{1-t} dt$$

$$R_1(a) = a - 1 \left(\frac{1}{1-a} - 1 \right) - \ln(1-a) \quad \downarrow \ln(a)$$

$$= -1 - a + 1 + \ln\left(\frac{1}{1-a}\right)$$

$$= \underbrace{\ln\left(\frac{1}{1-a}\right)}_{f(a)} - a$$

Conclusion :

$$f(a) = R_1(a) + a.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$

1.1) les fonctions $\begin{cases} u: t \mapsto (a-t)^{n+1} \\ v: t \mapsto (a-t)^{-n-1} \end{cases}$ sont d'une part

$$(0, a) \text{ et pour tout } t \in (0, a), \begin{cases} u'(t) = (a-t)^n \\ v'(t) = (a-t)^{-n-2} \end{cases}$$

Donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned} R_n(a) &= \int_0^a \frac{(a-t)^n}{(a-t)^{n+1}} dt \\ &= \left[-\frac{(a-t)^{n+1}}{(a-t)^{n+1}(n+1)} \right]_0^a - \int_0^a -\frac{(a-t)^{n+1}(n+1)}{(a-t)^{n+1}(n+1)} dt \end{aligned}$$

$$= \frac{a^{n+1}}{n+1} + \int_0^a \frac{(a-t)^{n+1}}{(a-t)^{n+1}} dt$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, R_n(a) = \frac{a^{n+1}}{n+1} + R_{n+1}(a)$$

12) Posons pour $n \in \mathbb{N}^+$ $\mathcal{P}_n: "f(a) = S_n(a) + R_n(a)"$

initialisation : pour $n=1$

D'après (0)1),

$$f(a) = a + r_1(a) \text{ donc } \mathcal{P}_1 \text{ est vrai}$$

hérédité - Soit $n \in \mathbb{N}^+$ fixé - | Supposons $\mathcal{P}_n$
Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$

Par hypothèse de récurrence,

$$f(a) = S_n(a) + R_n(a) \quad (*)$$

$$= S_n(a) + \frac{a^{n+1}}{n+1} + R_{n+1}(a) \quad \downarrow$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{a^k}{k} + \frac{a^{n+1}}{n+1} + R_{n+1}(a)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a^k}{k} + R_{n+1}(a)$$

$$= S_{n+1}(a) + R_{n+1}(a)$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vrai

Conclusion : Par principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, f(a) = S_n(a) + R_n(a)$$

13) Soit $a \in (0; 1) \subset \mathbb{C}$.

* Pour tout $t \in (0; a)$,

$$\frac{a-t}{1-t} \geq 0 \quad \text{car } t \in (0; a).$$

* Pour tout $t \in (0; a)$,

$$at \leq t \quad \text{car : } \begin{cases} a, t < 1 \\ t \leq a \end{cases}$$

$$\text{Donc : } -t \leq -at$$

Numéro d'inscription

08035



Né(e) le

07/06/2005

Signature

Nom

Prénom (s)

Ecricome

Épreuve :

Maths

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

07/09

Numéro de table

76

Puis,

$$a - t \leq a - at$$

D'où :

$$a - t \leq a(1 - t)$$

Et comme $1 - t > 0$

$$\frac{a-t}{1-t} \leq a$$

Conclusion :

$$\forall a \in (0, 1), \forall t \in (0, a), \quad 0 \leq \frac{a-t}{1-t} \leq a$$

13) e) D'après ce qui précède,

$$\forall t \in (0, a), \quad 0 \leq \frac{a-t}{1-t} \leq a$$

Puis par récurrence de t et $t^n \in \mathbb{N}^+$,

$$\forall t \in (0, a) \quad 0 \leq \left(\frac{a-t}{1-t} \right)^n \leq a^n$$

Puis, comme $\frac{a-t}{1-t} > 0$,

$$\forall t \in (0, a) \quad 0 \leq \frac{(a-t)^n}{(1-t)^{n+1}} \leq \frac{a^n}{1-t}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

Puis, par usage de l'intégrale, avec $a \geq 0$,

$$0 \leq \int_0^a \frac{(a-t)^n}{(1-t)^{n+1}} dt \leq \int_0^a \frac{a^n}{1-t} dt$$

D'où :

$$0 \leq R_n(a) \leq$$

non aboutie

13)c) D'après (2)b), on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
 $f(a) = S_n(a) + R_n(a)$

* Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (comme $R_n(a) \geq 0$),
 $f(a) \geq S_n(a)$

* Et d'après (3)b), on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
 $R_n \leq \frac{a^{n+1}}{1-a}$

D'où :

$$f(a) \leq S_n(a) + \frac{a^{n+1}}{1-a}$$

Donc par trinité,

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ \quad S_n(a) \leq f(a) \leq S_n(a) + \frac{a^{n+1}}{1-a}.$$

$$\text{Or, } \checkmark \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1}}{1-a} = 0 \quad \text{car } a \in]0, 1[$$

$$\checkmark \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(a) = S(a)$$

Donc par encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a) = S(a)$$

Autrement dit, comme $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a) = f(a)$,

$$f(a) = S(a).$$

(4) a) Soit $n \in \mathbb{N}^+$.

14)b) def $S(n)$:

$$u = \frac{1}{2}$$

for k in range $(1, n+1)$:

$$u = u + 1 / ((k-1) * (2 + (k-1)))$$

return u .

def val(eps) :

while $\text{Eps} - S(n) > (1/2) * k(n)$

14)c) * $S_n\left(\frac{1}{2}\right)$ est représentée par les points
orange

* $(-S_n(-1))$ est représentée par les points
bleues (on voit les deux suites entières,
 $(-S_{2n}(-1))$ et $(-S_{2n+1}(-1))$ les deux
convergent vers la même limite et
l'une étant croissante, l'autre décroissante

Numéro d'inscription

0	8	0	9	5	
---	---	---	---	---	--



Né(e) le

0	7	/	0	6	/	2	0	0	5
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Nom

Prénom (s)

Signature



Épreuve :

maths

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0	8	/	0	9
---	---	---	---	---

Numéro de table

--	--	--

Exercice 3

1)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$s'(x) = x'(x) + y'(x)$$

2)

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

PARTIE II

$$\begin{aligned} 4) \quad \det(P) &= 1 \times 1 - (-1) \times 0 \\ &= 1 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Donc P est inversible, en notant P^{-1} son inverse

$$\begin{aligned} P^{-1} &= \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion : P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

5) Remarquons que

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= O_{2,2} \end{aligned}$$

Donc le polynôme X^2 est annulateur de A ,
et il possède une unique racine : 0.

Donc $\text{Sp}(A) \subset \{0\}$.

Et on remarque que

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } 0 \text{ est valeur propre de } A$$

et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ est un vecteur propre associé.

Conclusion : $Sp(A) = \{0\}$.

- 6) Supposons par l'absurde que A est diagonalisable.
Dès lors, il existe P une matrice inversible,
 D une matrice diagonale (qui contient les
valeurs propres de A), telle que :

$$A = P D P^{-1}$$

On a donc :

$$A = 0_{\mathbb{R}^2} \text{ car } D = 0_{\mathbb{R}^2}$$

$$\text{ABSURDE! car } A \neq 0_{\mathbb{R}^2}.$$

Conclusion : A n'est pas diagonalisable.

$$\begin{aligned} 7) \quad P^{-1} A P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= T$$

Conclusion : $T = P^{-1} A P$

8) Soit $Y \in M_{2,1}(\mathbb{R})$

(Y est en équilibre de (f)) $\Leftrightarrow Y \in \ker(A)$

$$\Leftrightarrow Y \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

9) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$Y'(x) = JY(x) \Leftrightarrow P^{-1}X'(t) = P^{-1}AP P^{-1}X(t)$$

$$\Leftrightarrow P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t) \quad / \text{ puisque}$$

$$\Leftrightarrow X'(t) = AX(t)$$

$\Leftrightarrow (x \text{ est une solution de } (f))$

Conclusion :

(x est une solution de (f)) $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} \quad Y'(t) = JY(t)$

10) (Y est solution de $Y' = JY$) $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) = JY(t)$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u'(t) = u(t) \\ v'(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda_1 \in \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} u'(t) = \lambda_1 \\ v(t) = \lambda_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda_1 \in \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} u(t) = \lambda_1 t \\ v(t) = \lambda_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda_1 \in \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t) = \lambda_1 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

l'ensemble des solutions de $Y' = JY$ est

$$\left\{ t \mapsto \lambda_1 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

Numéro d'inscription

08035



Né(e) le

07 / 06 / 2005

Signature

Nom

Prénom(s)

Ecricome

Épreuve :

Dahls

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

09

09

Numéro de table

76

$$1.) (x \text{ est solution de } (f)) \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R} \quad y'(x) = Jy(x)$$

$$\Rightarrow \exists \lambda_1 \in \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda_1 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \exists \lambda_1 \in \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad x(x) = P_x \lambda_1 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \exists \lambda_1 \in \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad x(x) = \lambda_1 \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de (f) est

$$\left\{ t \mapsto \lambda_1 \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}, \lambda_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

PARTIE III

import numpy as np

12) def Ni(n):

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

B) N est nilpotente, donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que
 $N^k = 0_n$

Donc le polynôme N^k est annulateur de N ,
et il possède une unique racine : 0.

Donc $\text{Sp}(N) \subseteq \{0\}$.

non aboutie

(u) Supposons par l'absurde que N est diagonalisable.
Dès lors, il existe P une matrice inversible,
 D une matrice diagonale (constituée de valeurs
propres de N), telle que :

$$N = P D P^{-1}$$

On a donc :

$N = 0_n$ ABSURDE ! Car il existe
 $p \leq k$ tel que $N^p \neq 0_n$

Donc N n'est pas diagonalisable.

15)

D'après l'énoncé - pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 X(t) &= e^{tN} X_0 \\
 &= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} N^k X_0 \\
 &= \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^k}{k!} N^k X_0 + N^0 X_0
 \end{aligned}$$

 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont dérivables et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 X'(t) &= \sum_{k=1}^{p-1} \frac{k t^{k-1}}{k!} N^k X_0 \\
 &= \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} N^k X_0
 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} N^k X_0$$

16)

Pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$NX(t) = N \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} N^k X_0$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} N^{k+1} X_0$$

$$= \sum_{k=1}^p \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} N^k X_0$$

$$= \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} N^k X_0 + \underbrace{\frac{t^{p-1}}{(p-1)!} N^p X_0}_{=0}$$

$$= X'(t)$$

Donc : $\forall X$ est solution de $X' = NX$.

$$\begin{aligned}
 \checkmark X(0) &= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{0^k}{k!} N^k X_0 = \frac{0^0}{0!} N^0 X_0 + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{0^k}{k!} N^k X_0 \\
 &= X_0 + \underbrace{0}_{=0} = X_0
 \end{aligned}$$

Or un problème de Cauchy possède une unique solution

Conclusion : $X(A)$ est l'unique solution de problème de Cauchy défini par (E) et $X(0) = x_0$

17) def B(N, A):

if $\text{Nil}(N) == 0$:

return ("N n'est pas nilpotente")

else

T = np.eye(len(N))

S = T

for k in range(0, P):

T = t**k, k np.dot(T, k)

S = S + T

return S