EC-01652

VAZ

Noa

22/09/2006

Note de délibération : 17.27 / 20

Numéro d'inscription 0 1 6 5 2

Né(e) le 22 / 01 / 2006

Signature

Nom UA2

Prénom (s) NOA

écricome Épreuve : Mathématiques Appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 08

Numéro de table 068

Exercice 1 :

1.) • $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$

• $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}([X=k]) = \frac{1}{n}$

Conclusion : • $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$

• $\mathbb{E}[X] = \frac{n+1}{2}$

• $\mathbb{V}[X] = \frac{n^2-1}{12}$

2.) Soit $(j, k) \in [\![1, n]\!]^2$

• Premier cas : $k \geq j+1$

$\mathbb{P}([X=j] \cap [Y=k]) = \mathbb{P}([X=j]) \times \underbrace{\mathbb{P}_{[X=j]}([Y=k])}_{=0}$

$= 0$

Les concours ECRICOME sont des marques déposées. Toute reproduction de la copie est interdite. Copyright © ECRICOME – Tous droits réservés

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

• Deuxième cas : $k \leq j$

$$\mathbb{P}([X=j] \cap [Y=k]) = \mathbb{P}([X=j]) \times \mathbb{P}_{[X=j]}([Y=k])$$

- $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$
- Y sachant $[X=j]$ suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, j \rrbracket$

$$= \frac{1}{n} \times \frac{1}{j}$$

$$= \frac{1}{nj}$$

Conclusion : $\forall (j,k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\mathbb{P}([X=j] \cap [Y=k]) = \begin{cases} \frac{1}{nj} \text{ si } k \leq j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

3. $$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n} 1 = n$$

4. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à X :

$$\mathbb{P}([Y=k]) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}([X=j]) \times \mathbb{P}_{[X=j]}([Y=k])$$

5.a) $$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{n} \frac{k}{j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j} \frac{k}{j}$$

linéarité de la somme

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{j} k$$

somme des j premiers entiers

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (j+1)$$

5.b) Y admet une espérance car $Y(\Omega)$ est fini.
En outre :

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \mathbb{P}([Y=k])$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}([X=j]) \times \mathbb{P}_{[X=j]}([Y=k])$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{nj}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{j}$$

$$=$$

6. a | * X admet une espérance (q? 1)

* Y admet une espérance (q? 5.b)

donc XY admet une espérance, qui vaut :

~~$\mathbb{E}[XY] = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{n} \ldots \mathbb{P}([X=n] \cap [Y=q])$~~

~~$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j}$~~

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{n} k\,j\, \mathbb{P}([X=j] \cap [Y=k])$$

~~$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j} k \cdot j \cdot \mathbb{P}([X=j]) \cdot \mathbb{P}([Y=k] \mid [X=j])$~~

~~$= \sum_{j=1}^{n} j \cdot \mathbb{P}([X=j]) \sum_{k=1}^{j} k \cdot$~~

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j} k \cdot j\, \mathbb{P}([X=j] \cap [Y=k])$$

$= \frac{1}{nj}$ car $k \leq j$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{j} k$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{j(j+1)}{2}$$

somme des j premiers entiers

$$= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{n} j(j+1)$$

Numéro d'inscription : 01652

Né(e) le : 22 / 09 / 2006

Nom : UAZ

Prénom (s) : NOA

Signature

écricome

Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 08

Numéro de table 068

6.b) D'après la question précédente :

$$\mathbb{E}[XY] = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{n} j(j+1)$$

$$= \frac{1}{2n} \left(\sum_{j=1}^{n} j^2 + \sum_{j=1}^{n} j \right)$$

$$= \frac{1}{2n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2n} \times \frac{n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)}{6}$$

$$= \frac{3(n+1)^2(2n+1)}{12} = \frac{3(n+1) + (n+1)(2n+1)}{12}$$

$$= \frac{(n+1)^2(2n+1)}{4} = \frac{(n+1)(2n+4)}{12}$$

Les concours ECRICOME sont des marques déposées. Toute reproduction de la copie est interdite. Copyright © ECRICOME – Tous droits réservés

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

6.c] · X et Y admettent une espérance

· XY admet une espérance

Donc XY admet une covariance.
En outre :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

$$= \frac{(n+1)(2n+4)}{12} - \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+3}{4}$$

$$= \frac{2(n+1)(2n+4) - 3(n+1)(n+3)}{24}$$

$$= \frac{(n+1)\left(2(2n+4) - 3(n+3)\right)}{24}$$

$$= \frac{(n+1)(n-1)}{24}$$

$$= \frac{n^2-1}{24}$$

7.] Par contraposée de la célèbre proposition du cours :

La covariance de (X,Y) est non nulle donc les variables X et Y ne sont pas indépendantes

8.a) Import numpy.random as rd

```
def simul XY(n):
    X = rd.randint(1, n+1)
```

8.b) La fonction MyAt renvoie la droite de corrélation linéaire

8.c) · Dans le tracé 1, ce n'est pas une droite

· Dans le tracé 3, le point moyen de la série statistique ne figure pas sur la droite

· Dans le tracé 4, la droite ne suit pas les points

Conclusion : tracé 2

9.a) $A_n = [X = k] \cap [Y = k]$

9.b) $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}([X=k] \cap [Y=k])$

$$= \mathbb{P}([X=k]) \cdot \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=k])$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

9.c) Soit $j \in \mathbb{N}^*$

On a :

$$\forall t \in [\![j, j+1]\!], \quad j \leq t \leq j+1$$

$$\Rightarrow \quad \text{//} \quad , \quad \frac{1}{j+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{j}$$

Comme $j < j+1$ et que les fonctions $t \mapsto \frac{1}{t}$, $t \mapsto \frac{1}{j+1}$ et $t \mapsto \frac{1}{j}$ sont continues sur $[\![j, j+1]\!]$ (constantes et fonction inverse avec $j \neq 0$), il vient par croissance de l'intégrale :

$$\int_j^{j+1} \frac{1}{j+1} \leq \int_j^{j+1} \frac{1}{t} \leq \int_j^{j+1} \frac{1}{j}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{j+1} \leq \ln(j+1) - \ln(j) \leq \frac{1}{j}$$

Numéro d'inscription 01652

Né(e) le 22 / 09 / 2006

Signature

Nom VAZ

Prénom (s) NOA

ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 08

Numéro de table 068

9.d) En sommant la double inégalité établie à la question précédente pour j allant de 1 à n, il vient :

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1}}_{\text{(pas besoin)}} \leq \sum_{j=1}^{n} \ln(j+1) - \ln(j) \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$$

Or on, par télescopage :

$$\ln(n+1) - \underbrace{\ln(1)}_{=0} \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$$

On a donc :

$$\ln(n+1) \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \leq 1 + \ln(n)$$

$\uparrow$ car $\ln(n) > 0$

Et en divisant par n la double inégalité :

$$\frac{\ln(n+1)}{n} \leq P(A_n) \leq \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n}$$

Les concours ECRICOME sont des marques déposées. Toute reproduction de la copie est interdite. Copyright © ECRICOME – Tous droits réservés

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

9. c) En divisant l'inégalité établie à la question précédente double par $\frac{\ln(n)}{n}$, on a :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \frac{n\,\mathbb{P}(A_n)}{\ln(n)} \leqslant \frac{1}{\ln(n)} + 1$$

$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{\ln(n)} \to 1$ quand $n \to +\infty$

$\frac{1}{\ln(n)} \to 0$ quand $n \to +\infty$, donc $\frac{1}{\ln(n)} + 1 \to 1$ quand $n \to +\infty$

Ainsi, par encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\,\mathbb{P}(A_n)}{\ln(n)} = 1$$

Conclusion : $\mathbb{P}(A_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$

10. a) Select count(*) from adherent
where id_2025 = id_2026

10. b) Cette commande SQL permet d'afficher le numéro permettant d'identifier l'assuré et le nom de la compagnie d'assurances actuelle des individus ~~qui n'ont pas changé de compagnie~~

10.c1

Numéro d'inscription 01652

Né(e) le 22/09/2006

Signature

Nom UA2

Prénom (s) NOA

Écricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04/08

Numéro de table 068

Exercice 2 :

Partie I

1.1. • La fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

• La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$

Conclusion : f est définie sur ~~$]1, +\infty[$~~ $]-\infty, 1[$

2.1. • limite en $-\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{1-x} = 0^+$

$\lim\limits_{X \to 0^+} \ln(X) = -\infty$

Par composition de limites $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

• limite en 1^-

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{1}{1-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$. Par composition :

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$

Les concours ECRICOME sont des marques déposées. Toute reproduction de la copie est interdite. Copyright © ECRICOME – Tous droits réservés

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

3.1 f est dérivable sur $]-\infty, 1[$ comme composée et quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas

En outre :

$$\forall x \in]-\infty, 1[,\ f'(x) = \frac{x-1}{(1-x)^2} = \frac{\frac{1}{1-x}}{1-x} = \frac{\frac{-(1-x)}{1-x}}{1-x} = \frac{-1}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^3}$$

Du signe de la dérivée on déduit les variations de la fonction

x	$-\infty$		1
Signe de $x-1$		$-$	
Signe de $1-x$	$+$		$\|\|$
Signe de $f'(x)$	$+$		
variations de f	$-\infty$	↗	$+\infty$

4.a) f est dérivable deux fois sur $]-\infty, 1[$.
elle admet donc un développement limité d'ordre 2 en 0
D'après la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = 1 + xf'(0) + x^2\frac{f''(0)}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$\forall x \in]-\infty, 1[$, $f''(x) = \dfrac{(1-x)^3 - 3(x-1)(1-x)^2}{(1-x)^6}$

$$= \frac{(1-x)^3 + 3(1-x)(1-x)^2}{(1-x)^6}$$

$$= \frac{4}{(1-x)^5}$$

$$\frac{+3(1-x)^2}{(1-x)^6} = \frac{3}{(1-x)^4}$$

D'où :

$$f(x) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + o\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

4.b) $y^{\sharp} = f'(0)(x-0) + f(0)$

$= x$

5.1)

Numéro d'inscription 01652

Né(e) le 22/09/2006

Nom UA2

Prénom (s) NOA

Signature

écricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05/08

Numéro de table 069

Les concours ECRICOME sont des marques déposées. Toute reproduction de la copie est interdite. Copyright © ECRICOME – Tous droits réservés

Partie II

6.a) C'est la série harmonique, elle diverge. (grossièrement)

6.b) $S_n(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$S_{n+1}(1) - S_n(1) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (par une sorte de "télescopage")

$= \frac{1}{n+1} > 0$

6.c) La suite $(S_n(1))_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante (q° 6.b)

De plus, pour tout réel x, la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ diverge (6.a)

Conclusion : $\lim_{n \to +\infty} S_n(1) = +\infty$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

7.) Soit $x \in]-1,1[$

On a :

$$\frac{x^n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ car } \lim_{n\to+\infty} n x^n = 0$$

↑ car $x \in]-1,1[$ (par croissances comparées)

Ainsi :

✓ $\forall n \in [\![1,+\infty[\![$, $\frac{1}{n^2} \geqslant 0$, $\left|\frac{x^n}{n}\right| \geqslant 0$

✓ La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une intégrale de Riemann convergente

Conclusion : Par critères de comparaison (négligeabilité) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge absolument

8.a) * monotonie de $(S_{2n}(-1))_{n\in\mathbb{N}^*}$

$$S_{2n+2}(-1) - S_{2n}(-1) = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}$$

$$= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}$$

$$= \frac{(-1)^{2(n+1)}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}$$

$$= \frac{\left((-1)^2\right)^{n+1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}$$

$$= \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}$$

$$= \frac{2n+1 - (2n+2)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{-1}{(2n+2)(2n+1)}$$

< 0

Conclusion : $(S_{2n}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante

* monotonie de $(S_{2n+1}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$

$$S_{2n+3}(-1) - S_{2n+1}(-1) = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k}$$

$$= \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2}$$

de la même façon que pour la monotonie précédente ↓

$$= \frac{-1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2}$$

$$= \frac{1}{(2n+3)(2n+2)}$$

> 0

Conclusion : $\left(S_{2n+1}(-1)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante

* Limite en $+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1}(-1) - S_{2n}(-1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = 0$$

Conclusion : les suites $(S_{2n}(-1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{n+1}(-1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes

8. b) Car les suites $(S_{2n}(-1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{n+1}(-1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, elles convergent et ~~ce~~ vers une même limite.
Les deux suites correspondent aux termes pairs et impairs de la suite $(S_n(-1))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Conclusion : $(S_n(-1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente

8. c)

Numéro d'inscription 01b52

Né(e) le 22/09/2006

Nom UA2

Prénom (s) NOA

Signature

écricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06/08

Numéro de table 068

9.a) La série $\sum_{n\geq 1} \frac{n^q}{q}$ diverge grossièrement

9.b) Par somme $(S_n(x))$ diverge également

Partie III :

10.a) $\int_0^a \frac{dt}{1-t} = [-\ln(1-t)]_0^a = -\ln(1-a) = \ln\left(\frac{1}{1-a}\right)$

$\int_0^a \frac{dt}{(1-t)^2} = \left[\frac{1}{1-t}\right]_0^a = \frac{1}{1-a} - 1 = \frac{a}{1-a}$

10.b) $a + R_1(a) = a + \int_0^a \frac{(a-t)^{\alpha+1}}{(1-t)^2} dt$

$= a + \alpha \int_0^a \frac{dt}{(1-t)^2} - \int_0^\alpha \frac{t}{(1-t)^2} dt$

10.b) $a + R_1(a) = a + \int_0^a \frac{a-t}{(1-t)^2} dt$

$= a + \int_0^a \frac{(a-1)+(1-t)}{(1-t)^2} dt$

Les concours ECRICOME sont des marques déposées. Toute reproduction de la copie est interdite. Copyright © ECRICOME – Tous droits réservés

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$a + R_1(a) = a + (a-1)\int_0^a \frac{dt}{(1-t)^2} + \int_0^a \frac{1}{1-t}\,dt$$

par linéarité de l'intégrale

$$= a + \underbrace{(a-1)\cdot\frac{a}{1-a}}_{=-a} + \ln\left(\frac{1}{1-a}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{1-a}\right)$$

$$= f(a)$$

11.1 On définit les fonctions u et v $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$ telles que :

$$u(t) = (a-t)^n \quad ; \quad u'(t) = -n(a-t)^{n-1}$$

$$v'(t) = \frac{1}{(1-t)^{n+1}} \quad ; \quad v(t) = \frac{1}{-n(1-t)^n}$$

Ça ne marche pas dans le sens. Je change :

Par intégration par parties :

$$R_n(a) = \left[(a-t)^n \cdot \quad \right]_0^a - \int_0^a$$

$$u(t) = \frac{1}{(1-t)^{n+1}} \quad ; \quad u'(t) = -\frac{n+1}{(1-t)^{n+2}}$$

$$v'(t) = (a-t)^n \quad ; \quad v(t) = \frac{(a-t)^{n+1}}{n+1}$$

Par intégration par parties :

$$R_n(a) = \left[\frac{(a-t)^{n+1}}{(n+1)(1-t)^{n+1}}\right]_0^a + \int_0^a \frac{(a-t)^{n+1}}{(1-t)^{n+2}}\,dt$$

$$= \frac{a^{n+1}}{n+1} + R_{n+1}(a)$$

12.) On considère pour tout entier naturel n non nul, la proposition $P(n)$ " $f(a) = S_n(a) + R_n(a)$ "

* $P(1)$ est vraie. En effet :

D'une part : $f(a) = \ln\left(\frac{1}{1-a}\right)$

D'autre part : $S_1(a) + R_1(a) = a + f(a) - a$ (q? 10.b)

$= f(a) = \frac{1}{1-a}$

On a donc bien $f(a) = S_1(a) + R_1(a)$. Initialisation vérifiée.

* On considère un entier naturel n non nul

On suppose que $P(n)$ est vraie i.e $f(a) = S_n(a) + R_n(a)$

On veut montrer que $P(n+1)$ est vraie i.e $f(a) = S_{n+1}(a) + R_{n+1}(a)$

On a, d'après la question 11 :

$$S_{n+1}(a) + R_{n+1}(a) = \underbrace{S_{n+1}(a) - \frac{a^{n+1}}{n+1}} + R_n(a)$$

d'après l'hypothèse de récurrence. $= S_n(a) + R_n(a)$

$= f(a)$

Par principe de récurrence, la proposition P(n) est vraie pour tout entier naturel n non nul

En d'autres termes:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(a) = S_n(a) + R_n(a)$$

13.a) Soit $t \in [0, a]$

On a:

$$0 \leq t \leq a \quad \Big| \quad -a \leq -t \leq 0$$
$$\Rightarrow -a \leq -t \leq 0 \quad \Big| \quad \Rightarrow 1-a \leq 1-t \leq 1$$
$$\Rightarrow 0 \leq a-t \leq a$$

En divisant termes à termes:

$$0 \leq \frac{a-t}{1-t} \leq a$$

13.b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

D'après la question précédente:

$$0 \leq \frac{a-t}{1-t} \leq a \qquad (1-t \neq 0)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{(a-t)^n}{(1-t)^{n+1}} \leq \frac{a\cdot(a-t)^{n-1}}{(1-t)^{n-1}}$$

D'où par croissance de l'intégrale, car $0 \leq a$ et que les fonctions en jeu sont continues sur $[0, a]$:

$$0 \leq R_n(a) \leq a\int_0^a \frac{(a-t)^{n-1}}{(1-t)^{n-1}}$$

↑ Je ne conclus pas sur le côté droit de l'inégalité

Numéro d'inscription 01652

Né(e) le 22/09/2006

Signature

Nom UAZ

Prénom (s) Noa

ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07/07

Numéro de table 068

13. Cf de la question précédente :

$$0 \leq R_n(a) \leq \frac{a^{n+1}}{1-a}$$

$$\Rightarrow 0 \leq f(a) - S_n(a) \leq \frac{a^{n+1}}{1-a}$$

$$\Rightarrow S_n(a) \leq f(a) \leq \underbrace{\frac{a^{n+1}}{1-a}}_{\downarrow n \to +\infty \text{ car } a \in [0,1[} + S_n(a)$$

0

On sait que $\lim_{n \to +\infty} S_n(a) = S(a)$

D'où, par encadrement, $f(a) = S(a)$

14. a)

Les concours ECRICOME sont des marques déposées. Toute reproduction de la copie est interdite. Copyright © ECRICOME – Tous droits réservés

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

14.b) def Val(eps):

    n = 1

    while 1/2**n >= eps:

        ...

        ...

    return( )

14.c) · $(S_n(\frac{1}{2}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de croissante, donc celle ~~du dessus~~ au dessus des point oranges.

· À l'inverse, $(-S_n(-1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante, donc celle en dessous des point oranges.

Exercice 3 :

Partie I :

1.) δ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables.
En outre :
$\forall t \in \mathbb{R}$, $\delta'(t) = x'(t) + y'(t) = 0$

2.) $\forall t \in \mathbb{R}$, $x(t) = -y(t)$

3.)

Partie II

4.) $1 \times 1 - 0 \times (-1) \neq 0$ donc P est inversible
En outre :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5.) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lambda \in Sp(A) &\iff A - \lambda I \text{ non inversible} \\ &\iff (1-\lambda)(-1-\lambda) + 1 = 0 \\ &\iff \lambda^2 + 0 = 0 \\ &\iff \lambda = 0 \end{aligned}$$

$$Sp(A) = \{0\}$$

6.) Raisonnons par l'absurde en supposant que A est diagonalisable.
Si A était diagonalisable, il existerait une matrice P inversible et une matrice D nulle (car 0 est la seule valeur propre) telles que :

$$A = PDP^{-1} \iff A = PO_2P^{-1} \iff A = O_2$$

absurde.

Conclusion : A n'est pas diagonalisable.

7.)

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=J} \end{array}\right)$$

Conclusion : $J = P^{-1}AP$

8.)

Numéro d'inscription 01652

Né(e) le 22/09/2006

Nom VAZ

Prénom (s) NOA

Signature

écricome Épreuve : Mathématique appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08/08

Numéro de table 068

9.) 10) 11) /

Partie III

12.) def Nil(M)

p = 0

while M ≠ 0

p = p+1

return (p)

13.) /

14) On raisonne par l'absurde en supposant que N est diagonalisable

Il existerait alors une matrice P inversible et une matrice D diagonale (multiple de la matrice identité, car 1 seule valeur propre)

Ainsi :

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $N = P^{-1} \alpha I P \iff N = \alpha P^{-1} P$

$\iff N = \alpha I$ absurde.

Conclusion : N n'est pas diagonalisable

Les concours ECRICOME sont des marques déposées. Toute reproduction de la copie est interdite. Copyright © ECRICOME – Tous droits réservés

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE