

EC-03141

LEHEMBRE

Sarah

22/06/2006

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription

0 3 1 4 1



Né(e) le

2 2 / 0 6 / 2 0 0 6

Signature

Nom

L E H E M B R E

Prénom (s)

S A R A H

Épreuve : mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0 1 / 0 8

Numéro de table

3 2

Exercice 2 :Partie I

$$\begin{aligned}
 1) \quad x \in Df & \Leftrightarrow \frac{1}{1-x} > 0 \\
 & \Leftrightarrow 1-x > 0 \\
 & \Leftrightarrow 1 > x
 \end{aligned}$$

Ainsi $Df =]-\infty ; 1[$.

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 1-x = +\infty \quad \text{donc par quotient, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-x} = 0^+$$

par continuité de la fonction logarithme en 0,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = -\infty$$

$$\text{De même, } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty$$

par continuité de la fonction on a $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$

3) f est dérivable sur I en tant que composée de fonctions (quotient dont le dénominateur ne s'annule pas) dérivables sur I

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{(1-x)^2}}{\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{1-x}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$\frac{1}{1-x} > 0 \Leftrightarrow 1-x > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 > x$$

tableau de variation de f :

x	$-\infty$		1
signe $f'(x)$		+	
variations de f			$+\infty$

$-\infty$ 

- 4) a) f' est dérivable sur I (en tant que quotient dont le dénominateur ne s'annule pas)

$$\forall x \in I, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1-x)^2}$$

D'après la formule de Taylor Young à l'ordre 2;

$$\text{en } a \text{ on a : } f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + o(x^2)$$

$$f(0) = 0 ; \quad f'(0) = 1 ; \quad f''(0) = -1$$

Ainsi, en 0, $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

- b) Ainsi l'équation tangente de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 est donnée par $y = x$

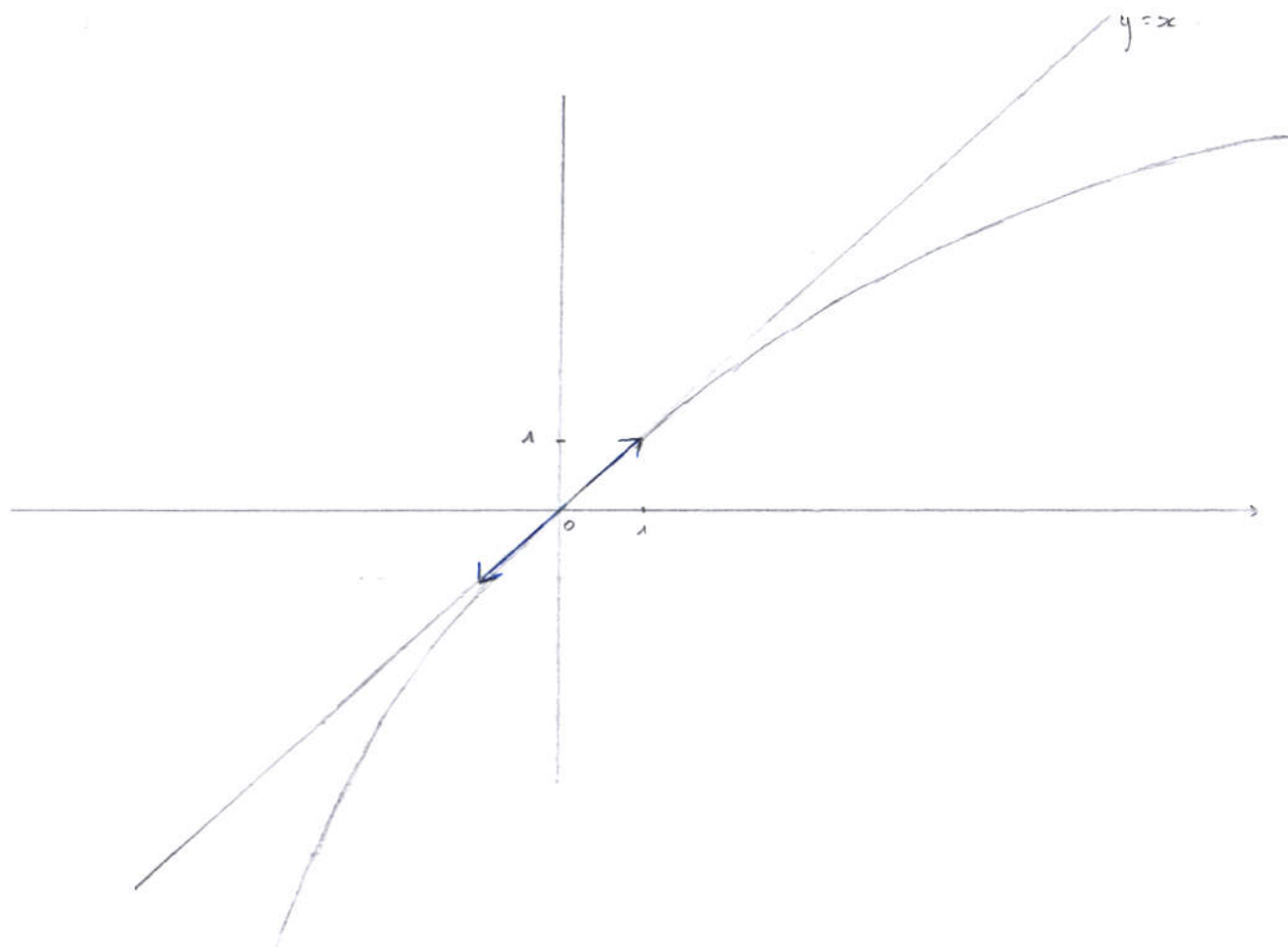
$$f(x) - y = f(x) - x = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) - x$$

$$\text{en } 0, \quad f(x) - x = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x.$$

$$= -\frac{x^2}{2} + o(x^2) < 0 \quad (\Rightarrow) \quad f(x) \leq x$$

Ainsi en ce point, la courbe est en dessous de sa tangente

5)



Partie II

6) a) la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge en tant que série de Riemann de paramètre $x = 1$ (divergente)

$$b) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{n+1}(1) - S_n(1) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} > 0$$

Ainsi, la suite $(S_n(1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

c) comme $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge et que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k} > 0$ on en déduit que, comme $(S_n(1))$ est croissante, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(1) = +\infty$

7) on sait que $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$$\forall x \in]-1; 1[.$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$k \leq k!$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*,$

$$\frac{x^k}{k!} \leq x^k$$

or $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ converge absolument en tant que série géométrique ($|x| < 1$)

Ainsi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge absolument car $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{x^k}{k!} \right|$ converge.

or $0 < \left| \frac{x^k}{k!} \right| \leq |x^k|$ car $x \in]-1; 1[.$

d'où par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la convergence absolue de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

8) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$S_{2(n+1)}(-1) - S_{2n}(-1) = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}$$

$$= \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2}$$

$$= -\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{x^{2n+2}}{2n+2}$$

comme $x \in]-1; 1[$,

$$\frac{x^{2n+1}}{2n+1} > \frac{x^{2n+2}}{2n+1}$$

d'où $\frac{x^{2n+1}}{2n+1} > \frac{x^{2n+2}}{2n+1}$ car $2n+1 > 0$

$$\text{et comme } \frac{x^{2n+2}}{2n+1} > \frac{x^{2n+2}}{2n+2}$$

$$\text{on a : } \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} < 0 \text{ soit } S_{2(n+1)}(-1) \leq S_{2n}(-1)$$

$$S_{2(n+1)+1}(-1) - S_{2n+1}(-1) = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k}$$

$$= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3}$$

$$= \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} > 0$$

Numéro d'inscription

0 3 1 4 1



Né(e) le

2 2 / 0 6 / 7 0 0 6

Signature

Nom

L E H E M B R E

Prénom (s)

S A R A H

Épreuve : mathématiquesSujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0 2 / 0 2

Numéro de table

3 2

d'où

$$\underline{S_{2(n+1)+1}(-1) \geq S_{2n+1}(-1)}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ De plus, } S_{2n}(-1) - S_{2n+1}(-1) &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} \\ &= - \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Ainsi comme, $(S_{2n}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, $(S_{2n+1}(-1))$ est croissanteet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n}(-1) - S_{2n+1}(-1)) = 0$,les suites sont bien adjacentes.

b) comme il s'agit des suites extraites de la suite $(S_n(-1))$, et qu'elles convergent (d'après 7)) vers une même limite en tant que suites adjacentes, on a donc bien $(S_n(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergente.

on note s cette limite.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

c) comme $(S_{2n}(-1))$ est croissante.
et que $(S_{2n+1}(-1))$ est décroissante.
on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} S_{2n}(-1) &\leq s \leq S_{2n+1}(-1) \\ \Rightarrow 0 &\leq s \leq S_{2n+1}(-1) - S_{2n}(-1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 \geq -s + S_{2n}(-1) \Rightarrow S_{2n}(-1) - S_{2n+1}(-1)$$

d'où par passage à la valeur absolue,

d) comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n}(-1) - S_{2n+1}(-1) = \frac{1}{2n+1}$ (8) a))

et que $0 < n \leq 2n+1 \Rightarrow \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{n}$
car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{N}_*^*$

d'où par transitivité avec 8) c),

$$\underline{| \ln 2 + S_n(-1) | \leq \frac{1}{n}}$$

9) a) $\forall x \neq 1, \forall h \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{h} \leq 1 \Rightarrow \frac{x^h}{h}$$

$$x^h \geq 1 \Rightarrow \frac{x^h}{h} \geq \frac{1}{h} > 0$$

(car $h \geq 1$)

or comme $\sum_{h \geq 1} \frac{1}{h}$ diverge (6) a)

on a par critère de comparaison pour les séries à termes positifs la série $\sum_{h \geq 1} \frac{x^h}{h}$ qui converge.

b) Ainsi comme $\sum_{h \geq 1} \frac{x^h}{h}$ converge et que $x > 1$, on a :

$$\frac{x^h}{h} > 0$$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = +\infty$.

Partie 3 :

10) a) $t \mapsto \frac{1}{1-t}$

est continue sur $[0; a]$ ou $[a; 0]$

en tant que ~~fonction~~ quotient dont

le dénominateur ne s'annule pas

sur l'intervalle $(a \neq 1)$. Donc l'intégrale existe.

$$\int_0^a \frac{1}{1-t} dt = \left[-\ln(1-t) \right]_0^a$$

$$= \underline{-\ln(1-a)}$$

De même, $t \mapsto \frac{1}{(1-t)^2}$ est continue sur $[0; a]$ ou

$[a; 0]$ en tant que quotient dont

le dénominateur ne s'annule pas sur

l'intervalle $(a \neq 1)$. Donc l'intégrale existe

$$\int_0^a \frac{1}{(1-t)^2} dt = \left[-\frac{1}{1-t} \right]_0^a = -\frac{1}{1-a} + 1$$

b) $a + R_n(a) = a + \int_0^a \frac{(a-t)}{(1-a)^2} dt$. (cette intégrale existe bien
 en tant que intégrale de
 fonction continue (quelque
 soit le dénominateur ne
 s'annule pas))

$$= a + \int_0^a \frac{-(1-a) + (1-t)}{(1-a)^2} dt$$

$$= a + \int_0^a \left(-\frac{1}{(1-a)} + \frac{1-t}{(1-a)^2} \right) dt$$

$$= a + \left[-\frac{1}{1-a} \times t + \frac{1}{(1-a)^2} \times \left(t - \frac{1}{2} t^2 \right) \right]_0^a$$

$$= a + \left(\frac{-a}{1-a} + \frac{a}{(1-a)^2} - \frac{a^2}{2(1-a)^2} \right)$$

11) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u'(t) = (a-t)^n$ $u(t) = -\frac{(a-t)^{n+1}}{n+1}$
 $v(t) = \frac{1}{(1-t)^{n+2}}$ $v'(t) = +\frac{(n+1)}{(1-t)^{n+2}}$
 u et v sont C^1 sur $[0; a]$,
 par intégration par parties on a :

$$R_n(a) = \left[-\frac{(a-t)^{n+1}}{(1-t)^{n+2}(n+1)} \right]_0^a + \int_0^a \frac{(a-t)^{n+1}}{(1-t)^{n+2}} \times \frac{1}{(1-t)^{n+2}} dt$$

$$= \frac{a^{n+1}}{n+1} + S_{n+1}(a)$$

Numéro d'inscription

0 3 1 4 1



Né(e) le

22 / 06 / 2006

Signature

Nom

L E H E M B R E

Prénom(s)

S A R A H

Épreuve : mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

03 / 08

Numéro de table

32

12) on pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n) : f(a) = S_n(a) + R_n(a)$

Initialisation : pour $n = 1$, $S_1(a) + R_1(a)$

$$= \frac{a^1}{1} + R_1(a)$$

$$= f(a) \text{ d'après 10) b)}$$

ainsi $P(1)$ vraie.

Hérédité : supposons que $P(n)$ soit vraie au rang $n \geq 1$ fixé,

$$S_{n+1}(a) + R_{n+1}(a) = \left(S_n(a) + \frac{a^{n+1}}{n+1} \right) + \left(R_n - \frac{a^{n+1}}{n+1} \right)$$

d'après 11)

par hypothèse de récurrence, il vient :

$$S_{n+1}(a) + R_{n+1}(a) = f(a) - \frac{a^{n+1}}{n+1} + \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

ainsi $P(n+1)$ vraie.

Conclusion, d'après le principe de récurrence on a bien démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\underline{f(a) = S_n(a) + R_n(a)}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

~~14)~~ a) 13) a) $\forall t \in [0, a]$ $0 \leq t \leq a$

$$\Rightarrow 1 \geq 1 - t \geq 1 - a > 0$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-a} \quad \left. \begin{array}{l} \text{car la fonction} \\ \text{inverse est décroissante} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow 0 \leq a-t \leq \frac{a-t}{1-t} \leq \frac{a-t}{1-a} \quad \left. \begin{array}{l} \text{sur } \mathbb{R}^+ \end{array} \right\}$$

$$\text{car } \frac{a-t}{1-a} \leq \frac{a}{1-a} \quad \begin{array}{l} \text{car } t \geq 0 \\ \text{car } t \leq a \end{array} \quad \text{donc } a-t \geq 0$$

$$\text{car } \frac{a}{1-a} \leq a \quad \text{car } a \in [0; 1[.$$

d'où l'inégalité : $0 \leq \frac{a-t}{1-t} \leq a$

b) dans l'inégalité 13) a), on compose par la fonction puissance $u \rightarrow u^n$ qui est croissante sur $\mathbb{R}^+$ puis on multiplie par $\frac{1}{1-t} > 0$ car $t < 1$

on obtient : $0 \leq \frac{(a-t)^n}{(1-t)^{n+1}} \leq \frac{a^n}{1-t}$

- les fonctions en jeu sont continues sur $[0; a]$
- $0 \leq a$.
- par la croissance de l'intégrale, on a :

$$0 \leq \int_0^a \frac{(a-t)^n}{(1-t)^{n+1}} dt \leq \int_0^a \frac{a^n}{1-t} dt.$$

$$a \text{ quel donne, } 0 \leq R_n(a) \leq \left[a^n - \ln(1-a) \right]_0^a = -a^n + \ln(1-a)$$

$$\frac{a^{n+1}}{1-a} = 1 - \sum_{k=0}^n a^k$$

c) ainsi comme $a \in [0; 1[$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} = 0$

Par encadrement $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(a) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{d'où } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(a) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(a) - R_n(a) \\ &= \underline{f(a)} \end{aligned}$$

14) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

en posant $a = \frac{1}{2}$, on obtient avec 13) b),

$$0 \leq R_n\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow 0 \leq R_n\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2^n}$$

avec 12)

$$\Rightarrow 0 \leq f\left(\frac{1}{2}\right) - S_n\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2^n}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k} \leq \frac{1}{2^n}$$

$$\Rightarrow \underline{\left| \ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k 2^k} \right| \leq \frac{1}{2^n}}$$

car les termes sont déjà positifs.

1h) b) def Val (eps)

```
n = 1
s = 0
while (1/2)**n > eps :
    s = s + (1/n) * (1/(2**n))
    n = n+1

return s
```

c) $(-S_n(-1))$ varie selon sa parité

on a donc la suite représentée par les croix bleues

et $(S_n(\frac{1}{2}))$ représentée par les points oranges

Numéro d'inscription

0 3 1 4 1



Né(e) le

22 / 06 / 2006

Signature

Nom

L E H E M B R E

Prénom(s)

S A R A H

Épreuve : mathsSujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

04 / 08

Numéro de table

32

Exercice 3 :Partie I :

1) comme x et y sont dérivables (en tant que solutions de $\mathcal{E}$)

s est dérivable ^{comme} ~~par~~ somme de fonctions dérivables.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad s'(t) = (x + y)'(t) \\ = \underline{x'(t) + y'(t)} = 0$$

2) en poursuit : $s'(t) = x(t) + y(t) - x(t) - y(t) = 0$
avec x, y qui vérifient $\mathcal{E}$

$$\text{Ainsi } \forall t \in \Omega, \quad x'(t) = -y'(t) \\ \Rightarrow x(t) + y(t) = x(t) + y(t).$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

Partie II :

4) on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq 0$

$$PX = Y \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} x = a \\ -x + y = b \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} x = a \\ y = a + b \end{cases}$$

on a bien une unique
solution non nulle
donc P est inversible

$$(\Leftrightarrow) X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

on a $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

5) λ est valeur propre de A $(\Leftrightarrow) (A - \lambda I)$ est non inversible

$$(\Leftrightarrow) \det(A - \lambda I) = 0$$

$$(\Leftrightarrow) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\Leftrightarrow) (1-\lambda)(-1-\lambda) + 1 = 0$$

$$(\Leftrightarrow) \lambda^2 = 0$$

$$(\Leftrightarrow) \underline{\lambda = 0}$$

Ainsi A possède une unique valeur propre égale à 0

6) Supposons que A soit diagonalisable.
 alors il existerait P inversible et D diagonale
 tel que $A = P D P^{-1}$

or D contient les valeurs propres de A .
 c'est à dire $D = 0_2$

on aurait alors $A = P 0 P^{-1} = 0$ ce qui est absurde.
 Ainsi A n'est pas diagonalisable.

$$7) P^{-1} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J.$$

Ainsi $P^{-1} A P = J$

8) $(\mathcal{L}) \quad \begin{cases} (1) & x' = A x. \\ (2) & \end{cases}$

9) (x, y) solution de $(\mathcal{L}) \quad \begin{cases} (1) & \begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases} \end{cases}$

$(1) \quad x' = A x$

$(2) \quad x' = P J P^{-1} x$

$(3) \quad x' = P J y$

$$10) \quad y'(t) = 5y(t) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u'(t) = u(t) \\ v'(t) = v(t) \end{cases}$$

$$u(t) = \lambda e^t \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$v(t) = \mu e^t \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Ainsi } \underline{y(t) = \begin{pmatrix} \lambda e^t \\ \mu e^t \end{pmatrix}} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$11) \quad y'(t) = 5y(t) \Leftrightarrow x, y \text{ solutions de } \mathcal{L}$$

Numéro d'inscription

0 3 1 4 1



Né(e) le

22 / 06 / 2006

Signature

Nom

L E H E M B R E

Prénom(s)

S A R A H

Épreuve : mathsSujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

05 / 06

Numéro de table

32

Partie III12) def Nil(π) $p = 0$ while $\pi \neq 0$: $\pi = \pi \cdot \text{dot}(\pi, \pi)$ $p = p + 1$ return p .

13) $x' = Nx$ ainsi x' est le vecteur propre de N
associé à la valeur propre 1.

14) supposons N diagonalisable.il existerait alors P inversible et D diagonalisabletel que $N = P D P^{-1}$ or D contient la valeur propre de N c'est à dire $D = I$.on aurait alors $N = I$, et $N^R = I^R = 0$

or il n'existe pas de $h \in \mathbb{R}$ tel que $I^h = 0$, d'où l'absurdité
Ainsi N n'est pas diagonalisable.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

15) $\forall t \in \mathbb{R},$

$$\begin{aligned}
 x'(t) &= N x(t) \\
 &= N B(t) x_0 \\
 &= N \left(\sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} N^k \right) x_0 \\
 &= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} N^{k+1} x_0 \\
 &= \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} N^k x_0 \quad + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} N^p x_0 \\
 &= \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} N^k x_0 \quad \text{car } N \text{ est nilpotente d'indice } p.
 \end{aligned}$$

16) il y a une inconnue et une condition de départ donc $x(t)$ est bien l'unique solution.

17) def B(N, t) :

if Nil(N) == 0 :

return (" ")

else

$\tau = \text{np. eye}(\text{len}(N))$

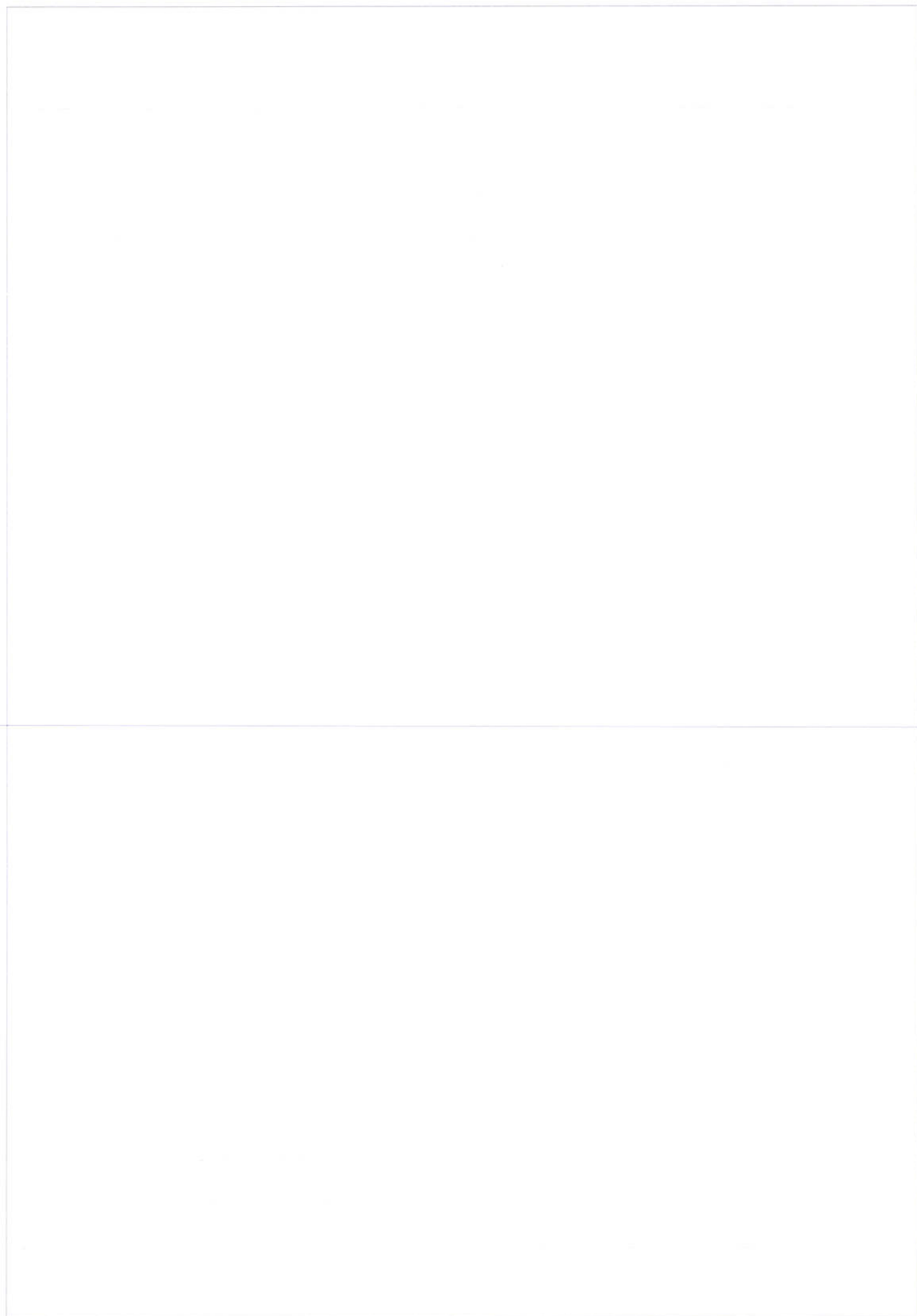
$S = \tau$

for h in range (Nil(N) - 1) :

$\tau = \tau / (h-1) * \text{dot}(\tau, N)$

$S = S + \tau$

return S



Numéro d'inscription

03141



Né(e) le

22 / 06 / 2006

Signature

Nom

LEHETNERE

Prénom(s)

SARAH



Épreuve : maths

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

06 / 08

Numéro de table

32

Exercice 1 :

1) $X \sim U_{[1; n]}$

car on choisit de manière équiprobable une compagnie.

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

$$V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

2)

si $h \leq j$.

$$P(X=j \cap X=h) = \begin{matrix} P(Y=h) \\ (X=j) \end{matrix} \times P(X=j)$$

$$= \frac{1}{j} \times \frac{1}{n}$$

car sachant que $X=j$, on choisit de nouveau, par équiprobabilité parmi j compagnies.si $h > j$ (soit $h \geq j+1$):

$$P(X=j \cap Y=h) = \begin{matrix} P(X=h) \\ (X=j) \end{matrix} \times P(X=j)$$

$$= 0$$

car on ne peut pas choisir une moins bonne compagnie au deuxième tour par rapport au premier tour.

d'où la loi conjuguée.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

3)

$$\sum_{h=1}^n \sum_{j=h}^n \frac{1}{j} =$$

avec 2), on a en sommant pour toutes les valeurs de h de 1 à n

$$\sum P(X=j \cap Y=h) = \sum$$

Avec le ~~SEE~~ système complet d'événements, $(X=j)_{j \in \{1; n\}}$, on a par la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} 4) \quad \forall h \in \{1, n\}, \quad P(Y=h) &= \sum_{j=1}^n P(X=j \cap Y=h) \\ &= \sum_{j=h}^n \frac{1}{nj} \end{aligned}$$

$$\text{car si } j < h, \quad P(X=j \cap Y=h) = 0$$

5) a)

b) $E(Y)$ existe car Y est une variable aléatoire finie.

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{k=1}^n k P(X=k) = \sum_{k=1}^n k \sum_{j=k}^n \frac{1}{j} \\
 &= \sum_{k=1}^n k \sum_{j=k}^n \frac{k}{j} \\
 &= \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{1}{2} \times \sum_{j=1}^n (j+1) \text{ d'après 5a).} \\
 &= \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{1}{2} \times \sum_{j=2}^{n+1} j \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{n+1+n}{2} = \frac{n+3}{4}
 \end{aligned}$$

6) a) ~~comme $E(X)$ et $E(Y)$ existent~~
 comme X et Y sont des variables finies,
 XY est aussi finie, donc son espérance existe.

$$\begin{aligned}
 E(XY) &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq j \leq n}} j k P(X=j \cap Y=k) \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n j k \times \frac{1}{n \cdot j} \\
 &= \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n j
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad E(XY) &= \frac{1}{2n} \times \sum_{j=1}^n j(j+1) \\
 &= \frac{1}{2n} \times \left(\sum_{j=1}^n j^2 + \sum_{j=1}^n j \right) \\
 &= \frac{1}{2n} \times \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n+1}{2} \right) \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 3(n+1)}{12n} \\
 &= \frac{(n+1)(2n+4)}{12} \\
 &= \frac{(n+1)(n+2)}{6}
 \end{aligned}$$

c) comme $E(XY)$ existe, $\text{cov}(X, Y)$ existe.

on a par Koenig Huygens :

$$\begin{aligned}
 \text{cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\
 &= \frac{(n+1)(n+2)}{6} - \frac{n+1}{2} \times \frac{n+3}{4} \\
 &= \frac{(n+1)(2n-2)}{24} \\
 &= \frac{n^2 - 1}{24}
 \end{aligned}$$

7) on remarque que $P(X=1) < P(Y=2) \neq 0$

car $1 \in X(N)$

et $2 \in Y(N)$

or $P(X=1 \cap Y=2) = 0$ car $2 \geq 1+1$ d'après 2)

Ainsi, X et Y ne sont pas indépendantes.

Numéro d'inscription

03A41



Né(e) le

22 / 06 / 2006

Signature

Nom

LEHEMERRE

Prénom(s)

SARAH



Épreuve: maths

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

07 / 08

Numéro de table

32

8) a) def simul XY (n) :

$$\text{return } ((n^{**2} - 1) / 24)$$

car en informatique une variable peut être approchée
par son espérance (d'après la loi faible des grands
nombres)

b) cette fonction renvoie le coefficient de corrélation
linéaire associé à la série statistique.

c) il s'agit du traçé 2 car :

- la droite d'ajustement affine est une droite.
- la droite d'ajustement affine passe par le point moyen de la série statistique.
- et elle est appropriée au modèle, c'est à dire qu'elle suit au maximum la tendance des valeurs prises par le nuage de points (x_i, y_i) (contrairement au traçé 4)

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

9) a) $(A_n) = (X=Y)$

b) avec le système complet d'événement $(X=j); j \in \{1, n\}$
on a par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(A_n) = P(X=Y) &= \sum_{j=1}^n P(X=Y \cap X=j) \\ &= \sum_{j=1}^n P(Y=j \cap X=j) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{n_j} \quad \text{d'après 2)} \\ &= \frac{1}{n} \times \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \end{aligned}$$

c) ~~$\ast j \in \mathbb{N}^*$~~ , , ,

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $h(x) = \ln(x) - x$
 h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

tableau de variations de h

	2	0		1		1.0
signe $h'(x)$		$\parallel$	+	ϕ	-	
variation h		$\parallel$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	

$h(1) = -1$ Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x) \leq h(1) \Rightarrow \ln(x) \leq x-1 \leq x$

d) en sommant l'inégalité a) c) pour j allant de 1 à n , on a :

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{j+1} \leq \sum_{j=1}^n (\ln(j+1) - \ln(j)) \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$$

$\Rightarrow$ par télescopage $\sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} \leq \ln(n+1) \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$

la partie de gauche donne : $\sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} \leq \ln(n+1)$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \leq \ln(n+1) + 1 - \frac{1}{n+1}$$

et la partie de droite donne : $\ln(n+1) \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$

on a alors : $\ln(n+1) \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \leq \ln(n+1) + 1 - \frac{1}{n+1}$

$$\Rightarrow \frac{\ln(n+1)}{n} \leq P(A_n) \leq \frac{1}{n} \left(\ln(n+1) + 1 - \frac{1}{n+1} \right)$$

car $n > 0$

$$\text{et } \frac{1}{n} \left(\ln(n+1) + 1 - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{\ln(n+1)}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{\ln(n) + \frac{1}{n}}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)} \quad (9)_c$$

$$= \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n^2} + \underbrace{\left(\frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n+1} \right)}_{>1}$$

$$\text{d'où l'inégalité : } \frac{\ln(n+1)}{n} \leq P(A_n) < \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n}$$

$\forall n \geq 2$,

e) en divisant les termes dans $d1$ par $\frac{\ln(n)}{n} > 0$

on a :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \frac{\frac{P(A_n)}{\frac{\ln(n)}{n}}}{\frac{\ln(n)}{n}} \leq \frac{1}{\ln n} + \frac{\ln(n)}{\ln(n)}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)}{\ln n} \leq \frac{P(A_n)}{\frac{\ln n}{n}} \leq \frac{1}{\ln 2} + 1$$

$$\frac{\ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)}{\ln n} = \frac{\ln(n)}{\ln n} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n}$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n = +\infty$

par continuité de la fonction $\ln$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$

et par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 0$

Ainsi par encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(A_n)}{\frac{\ln n}{n}} = 1$$

d'où l'équivalence

Numéro d'inscription

03141



Né(e) le

22 / 06 / 2006

Signature

Nom

LEHRE LEBRE

Prénom(s)

SARAH

Épreuve : mathsSujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

08 / 08

Numéro de table

32

10) a) `SELECT COUNT (*) FROM adherent WHERE`
`id - 2025 = id - 2026.`

b) la commande permet de réaliser une jointure entre les 2 tableaux, c'est à dire de rajouter le nom de la compagnie cherché dans en 2026 dans le tableau adherent.

c) `SELECT AVG ( note )`
`FROM avis`

d) `SELECT * FROM moyenne.`
`ORDER BY note`

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

