

EC-05120

CHAILLOU

Noah

21/05/2006

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription

0 5 1 2 0



Né(e) le

2 1 / 0 5 / 2 0 0 6

Signature

Nom

C H A I L L O U

Prénom (s)

N O A H

Ecricome

Épreuve : Mathématiques Appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0 1 / 0 7

Numéro de table

0 4 4

Exercice 1

$$1) X \in \mathcal{V}[1, n]$$

$$E(X) = \frac{1+n}{2}$$

$$V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

$$2) \text{ Montrons que } \forall (j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket, p[(X=j) \cap (Y=k)] = \begin{cases} \frac{1}{n \cdot j} & \text{si } k \leq j \\ 0 & \text{si } k \geq j+1 \end{cases}$$

On sait que le numéro du deuxième tirage ne peut être strictement supérieur à celui du premier tirage $\Rightarrow$ pour $k > j \Leftrightarrow k \geq j+1$ on a.

$$p[(X=j) \cap (Y=k)] = 0$$

$$\text{on a de plus } p[(X=j) \cap (Y=k)] = p(X=j) p_{(X=j)}(Y=k) \quad \text{pour } k \leq j$$

$$\text{on } p_{(X=j)}(Y=k) = \frac{1}{j} \quad \text{car c'est une loi uniforme sur } \llbracket 1, j \rrbracket$$

$$\Rightarrow p[(X=j) \cap (Y=k)] = \frac{1}{n} \times \frac{1}{j} = \frac{1}{n \cdot j} \quad \text{D'où ce qu'on veut trouver}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$3) \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{1}{j} = ?$$

$$\text{on a } \begin{cases} 1 \leq k \leq n \\ k \leq j \leq n \end{cases} \Rightarrow 1 \leq k \leq j \leq n \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^n 1 = \underline{n}$$

4) on a $(X=j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ qui est un système complet d'événement

La formule des probabilités totales nous donne alors $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \sum_{j=1}^n P(X=j) P_{(X=j)}(X=k) \\ &= \sum_{j=k}^n P(X=j) P_{(X=j)}(X=k) = \sum_{j=k}^n \frac{1}{nj} \end{aligned}$$

car nul pour $k \geq j+1$

5) a) Montrons que
$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{k}{j} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n j+1.$$

on effectue le même changement d'indice qu'en ③ et on obtien

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{k}{j} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \frac{k}{j} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j k$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j+1) \quad \text{qui est ce qu'on}$$

voulait trouver

b) X possède un support fini $[1, j]$ ($\approx X=j$) $[1, j] \subset [1, n]$
donc X admet une espérance

$$\text{et } E|X| = \sum_{k=1}^j k p(X=k) = \sum_{k=1}^j \sum_{j=k}^n \frac{k}{nj}$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \frac{k}{nj} = \sum_{j=1}^n \frac{j+1}{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n j+1$$

$$= \frac{1}{2n} \sum_{j=2}^{n+1} j = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{n+1} j - \frac{1}{2n} = \frac{1 \cdot (n+1)(n+2)}{2} - \frac{2}{4n}$$

$$= \frac{n^2 + 3n + 2 - 2}{4n} = \frac{n^2 + 3n}{4n} = \underline{\underline{\frac{n+3}{4}}}$$

6) a) X et Y admettent ^{toute les deux} un support fini donc $E(XY)$ existe

$$E(XY) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j jk P(X=j) \cap (Y=k)$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j jk \times \frac{1}{n \cdot j} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j k$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n j(j+1) \quad \text{qui est ce qu'on voulait trouver}$$

b) on a $E(XY) = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n j(j+1)$

$$= \frac{1}{2n} \left(\sum_{j=1}^n j^2 + \sum_{j=1}^n j \right) = \frac{1}{2n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{(n+1)}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)(2n+1) + 3(n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+4)}{2 \times 6} = \frac{(n+1)(n+2)}{6}$$

c) $\text{cov}(XY) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{(n+1)(n+2)}{6} - \frac{n+1}{2} \times \frac{n+3}{4}$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{6} - \frac{(n+1)(n+3)}{8} = \frac{8(n+1)(n+2) - 6(n+1)(n+3)}{48} = \frac{2n^2 - 2}{48} = \frac{n^2 - 1}{24}$$

Numéro d'inscription

0 5 1 2 0



Né(e) le

2 1 / 0 5 / 2 0 0 6

Signature

Nom

C H A I L L O U

Prénom (s)

N O A H



Épreuve :

Mathématiques Appliquées

Sujet

☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement
renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0 2 / 0 7

Numéro de table

0 4 4

Suite exercice 1.

7) $\text{cov}(X, Y) \neq 0 \Rightarrow$ X et Y ne sont pas indépendantes

8) a) def simul XY(n):

X = rd.randint(1, n+1)

Y = rd.randint(1, X+1)

return X * Y

b) La fonction Myst renvoie le coefficient de corrélation linéaire
de (X, Y).

c) X

9) A_n : "le particulier choisit la même compagnie d'assurances lors des deux
années considérées"

$$9) A_n = \bigcup_{k=1}^n ((X=k) \cap (Y=k))$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$b) \text{ on a } A_n = \bigcup_{k=1}^n (X=k \cap Y=k)$$

$$\Rightarrow P(A_n) = P\left(\bigcup_{k=1}^n (X=k \cap Y=k)\right) = \sum_{k=1}^n P(X=k \cap Y=k) \quad \text{car les événements sont disjoints}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n \cdot k} \quad \text{grâce à l'égalité trouvée en ②}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{qui est ce qu'on voulait trouver (k est une variable muette donc mettre j à la place revient au même)}$$

$$c) \text{ Montrons que } \forall j \in \mathbb{N}^+ \quad \frac{1}{j+1} \leq \ln(j+1) - \ln(j) \leq \frac{1}{j}$$

~~Soit $f(j) = \ln(j+1) - \ln(j) - \frac{1}{j}$ on a f dérivable sur $[1, +\infty[$~~

~~et $f'(j) = \frac{1}{j+1} - \frac{1}{j} + \frac{1}{j^2} = \frac{j \cdot j^2 - (j+1) \cdot j^2 + j \cdot (j+1)}{j^3(j+1)}$~~

~~$= \frac{1}{j^3(j+1)} > 0 \quad \forall j \geq 1 \Rightarrow f \text{ est croissante}$~~

~~et $\lim_{j \rightarrow +\infty} f = 0 \Rightarrow \ln(j+1) - \ln(j) - \frac{1}{j} \leq 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}^+$~~

$$\Rightarrow \ln(j+1) - \ln(j) \leq \frac{1}{j}$$

Même méthode pour l'autre côté

on a pour $j \geq 1$.

$$\leq \frac{j+1}{j}$$

c) On a :

$$\frac{1}{j+1} \leq \ln(j+1) - \ln(j) \leq \frac{1}{j}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n \frac{1}{j+1} \leq \sum_{j=1}^n \ln(j+1) - \ln(j) \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n \frac{1}{j+1} \leq \ln(n+1) \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \quad (\text{somme télescopique})$$

$$\text{on a } \ln(n+1) \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(n+1)}{n} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} = p(A_n) \quad \text{car } \frac{1}{n} > 0$$

$$\bullet \sum_{j=1}^n \frac{1}{j+1} \leq \ln(n+1) \Rightarrow \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} \leq \ln(n+1)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \leq \ln(n+1) + \frac{1}{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) + \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow p(A_n) \leq \frac{\ln(n+1)}{n} + \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n}$$

d'où ce qu'on veut trouver

$$\text{donc } \frac{\ln(n+1)}{n} \underset{+0}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$$

$$\text{et } \frac{\left| \frac{1}{n} \right|}{\left| \frac{\ln n}{n} \right|} = \frac{1}{n} \times \frac{n}{\ln n} = \frac{1}{\ln n} \xrightarrow{+0} 0 \Rightarrow \frac{1}{n} \underset{+0}{\sim} 0 \left(\frac{\ln n}{n} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n} \underset{+0}{\sim} \frac{\ln n}{n}$$

$$\text{Donc par encadrement } p(A_n) \underset{+0}{\sim} \frac{\ln n}{n}$$

Numéro d'inscription

05120



Né(e) le

21 / 05 / 2006

Signature

M.

Nom

CHAILLOU

Prénom (s)

NOAH

Ecricome

Épreuve : Mathématiques Appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

03 / 07

Numéro de table

044

Guide ex 1.

101_a SELECT COUNT assure FROM adherent WHERE
id_2025 = id 2026.

b) Elle sélectionne les colonnes assure et nom des bases adherent
et compagnie pour lesquels le id_2026 est égale à l'id du tableau
compagnie.

on obtient par exemple

assure

nom

avec l'exemple
de l'énoncé

1003

securite

1004

Larentia

:

:

c) select AVG note from avis and select compagnie from
avis.

d) select nom from compagnie inner join note from
moyennas and order by m.note.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

Exercice 2:

$$f(x) = \ln \left(\frac{1}{1-x} \right)$$

Partie I

1) f est définie pour $\frac{1}{1-x} > 0$ et $1-x \neq 0$

$$\Rightarrow x < 1 \text{ et } x \neq 1.$$

$$\Rightarrow \underline{D_f =]-\infty, 1[}$$

2) • limite en 1: on a $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} = +\infty$

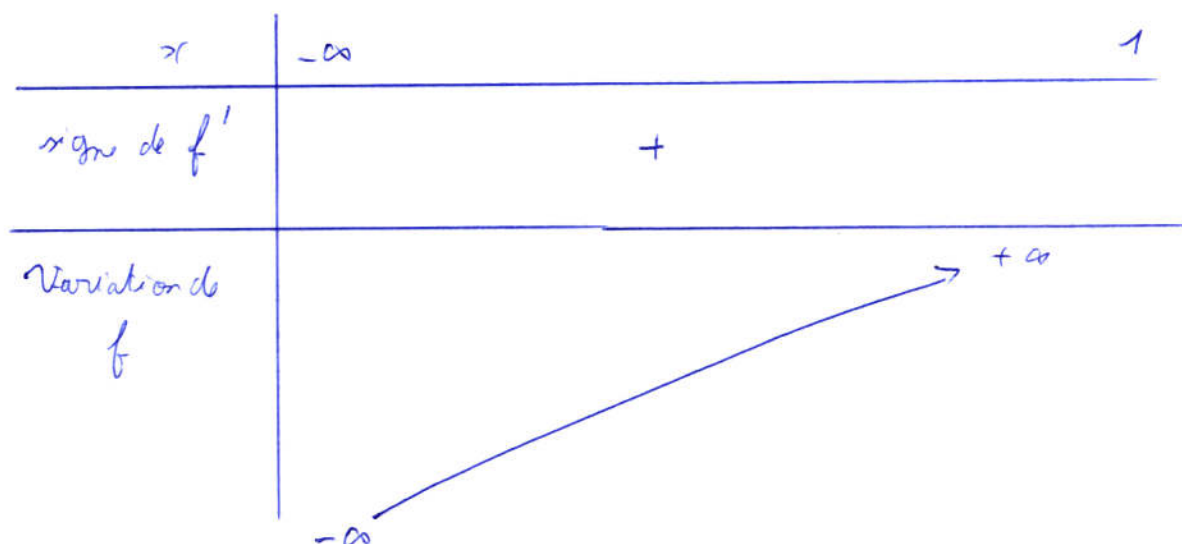
$$\Rightarrow \underline{\lim_{x \rightarrow 1} \ln \left(\frac{1}{1-x} \right) = +\infty \text{ par composition}}$$

• limite en $-\infty$ on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-x} = 0^+$

$$\Rightarrow \underline{\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{1}{1-x} \right) = -\infty \text{ par composition}}$$

3) On a. f dérivable sur $] -\infty, 1[$. de dérivée:

$$f'(x) = \frac{\frac{-(-1)}{(1-x)^2}}{\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{(1-x)^2} \sqrt{1-x} = \frac{1}{1-x} > 0 \quad \forall x < 1$$



4) a) on a. $f'(x) = \frac{1}{1-x}$ (dérivable sur $] -\infty, 1[$)

$$\text{et } f''(x) = -\frac{(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

La formule de Taylor young nous donne

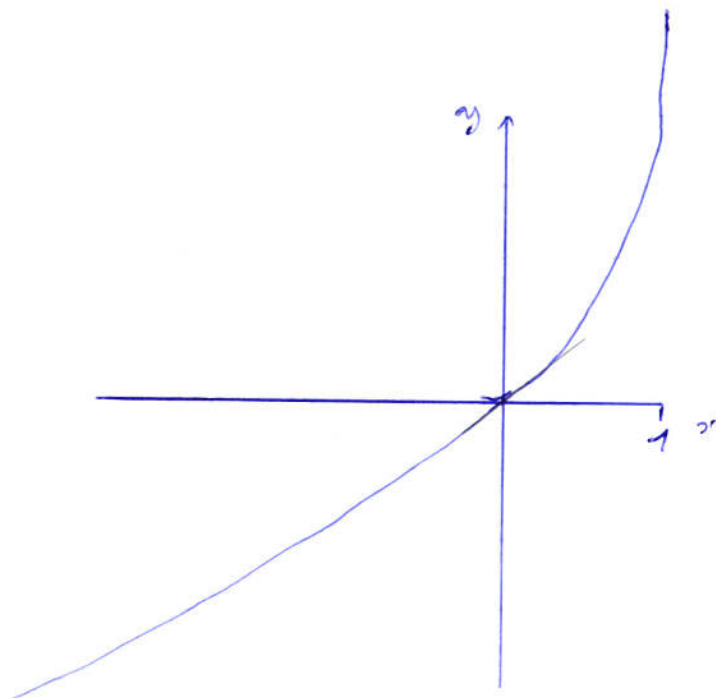
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$= \underline{\underline{0 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}}$$

b-1: donc une équation de la tangente de f en 0 est $y = x$

De plus en ce point le coef directeur devant f' est > 0 donc f est au dessus de cette tangente

51:



Partie II

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$$

6) a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge (car c'est la série harmonique)
(d'après Riemann)

$$b) |S_n(1)|_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{ou} \quad S_n(1) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$\text{ou} \quad S_{n+1}(1) - S_n(1) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} > 0$$

Donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |S_n(1)|$ est croissant

Numéro d'inscription

0 5 1 2 0



Né(e) le

2 1 / 0 5 / 2 0 0 6

Signature

Nom

C H A I L L O U

Prénom(s)

N O A H

Ecricome

Épreuve : Mathématiques Appliquées

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0 4

/ 0 7

Numéro de table

0 4

k

Suite exercice 2

6/c) on a $(S_n(1))_{n \in \mathbb{N}}$ qui est croissante et divergente elle ne peut donc pas converger vers 1 réel donc sa seule limite possible est $+\infty$

7) Montrons que $\forall x \in]-1, 1[$ $\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$ converge absolument

$$\text{on a } \left| \frac{x^k}{k} \right| < |x|^k$$

$$\text{on a } \sum_{k=1}^N |x|^k = |x| \times \frac{1-x^{N+1}}{1-x} \quad \text{pour } N \geq 1$$

$$\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{x}{1-x} \quad \text{car } x \in]-1, 1[$$

$\Rightarrow \sum_{k \geq 1} |x|^k$ converge donc par critère de comparaison pour.

des séries à termes positif: $\sum_{k \geq 1} \left| \frac{x^k}{k} \right|$ converge (=convergence absolue)

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$8) a) \text{ on a. } S_{2n}(-1) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} \quad \text{et} \quad S_{2n+1}(-1) = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k}$$

$$\bullet \text{ on a } S_{2n+2}(-1) - S_{2n}(-1) = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}$$

$$= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} < 0$$

$\Rightarrow S_{2n}(-1)$ est décroissante

$$\bullet S_{2n+3}(-1) - S_{2n+1}(-1) = \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2}$$

$$= \frac{-1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} > 0$$

$\Rightarrow S_{2n+1}(-1)$ est croissante

• Montrons maintenant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |S_{2n}(-1) - S_{2n+1}(-1)| = 0$

$$\text{on a. } S_{2n}(-1) - S_{2n+1}(-1) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k}$$

$$= - \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Les trois critères précédents nous permettent d'affirmer que

$|S_{2n}(-1)|$ et $|S_{2n+1}(-1)|$ sont adjacents

b) $S_{2n}(-1)$ et $S_{2n+1}(-1)$ admettent la même limite donc

$|S_n(-1)|$ admet cette limite donc $|S_n(-1)|$ est convergent.

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(-1) = -\ln(2)$$

Montrons que $|\ln(2) + S_{2n}(-1)| \leq S_{2n}(-1) - S_{2n+1}(-1)$.

$$\text{on a } S_{2n}(-1) \leq -\ln 2 \text{ et } S_{2n+1}(-1) \geq -\ln(2) \Rightarrow -S_{2n+1}(-1) \leq \ln 2$$

$$\Rightarrow \ln(2) + S_{2n}(-1) \leq S_{2n}(-1) + S_{2n+1}(-1)$$

$$S_{2n}(-1) \leq -\ln 2 \leq S_{2n+1}(-1)$$

$$\Rightarrow -S_{2n}(-1) \geq \ln 2 \geq -S_{2n+1}(-1)$$

$$\Rightarrow 0 \geq \ln 2 + \sum_{2n} (-1) \geq - \sum_{2n+1} (-1) + \sum_{2n} (-1).$$

$$\Rightarrow \underline{|\ln 2 + \sum_{2n} (-1)| \leq \sum_{2n} (-1) - \sum_{2n+1} (-1)}.$$

d) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^+ \quad |\ln 2 + \sum_n (-1)| \leq \frac{1}{n}$

on a montré en 8 a) que $\sum_{2n} (-1) - \sum_{2n+1} (-1) = \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}.$

or on a $\frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{n}$ car $n \geq 1$.

$$\Rightarrow \underline{|\ln 2 + \sum_n (-1)| \leq \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{n}} \quad \text{qui est ce qu'on voulait montrer.}$$

9) a) $x > 1$. on a $\frac{x^k}{k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$ par croissance comparée.

on a donc une série de terme général ne tendant pas vers 0 donc elle diverge.

b) Donc comme $\sum_n$ est croissante on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_n |x| = +\infty$.

Numéro d'inscription

0 5 1 2 0



Né(e) le

2 1 / 0 5 / 2 0 0 6

Signature

Nom

C H A I L L O U

Prénom (s)

N O A H

Épreuve :

Mathématiques appliquées

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement
renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0 5 /

0 7

Numéro de table

0 4 4

Guide service 2

$$\forall x \in [-1, 1[\quad S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$$

Partie III

$$a \in]-1, 1[\quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad R_n(a) = \int_0^a \frac{(a-t)^n}{(1-t)^{n+1}} dt$$

$$\text{10) a).} \quad \int_0^a \frac{1}{1-t} dt = \left[\ln|1-t| \right]_0^a = -\ln|1-a| = \ln \left| \frac{1}{1-a} \right|$$

$$\cdot \int_0^a \frac{1}{(1-t)^2} dt = \left[\frac{1}{1-t} \right]_0^a = \frac{1}{1-a} - 1 = \frac{a}{1-a}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

b) Montrons que $f(a) = a + R_1(a)$:

$$\text{on a } f(a) = \ln\left(\frac{1}{1-a}\right)$$

$$a + R_1(a) = a + \int_0^a \frac{(a-t)}{(1-t)^2} dt = a + \int_0^a \frac{(a-1)}{(1-t)^2} + \frac{1-t}{(1-t)^2} dt$$

$$= a + (a-1) \int_0^a \frac{1}{(1-t)^2} dt + \int_0^a \frac{1}{1-t} dt$$

$$= a + (a-1) \left(\frac{a}{1-a} \right) + \ln\left(\frac{1}{1-a}\right) = a - (1-a) \frac{a}{1-a} + \ln\left(\frac{1}{1-a}\right)$$

$$= a - a + \ln\left(\frac{1}{1-a}\right) = \ln\left(\frac{1}{1-a}\right) = \underline{f(a)} \quad \text{D'où ce qu'on voulait montrer}$$

$$11) \text{ on a } \int_0^a \frac{(a-t)^{n+1}}{(1-t)^{n+2}} dt = R_{n+1}(a)$$

$$v(t) = \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{(1-t)^{n+1}}$$

$$v(t) = (a-t)^{n+1}$$

$$v'(t) = \frac{1}{(1-t)^{n+2}}$$

$$v'(t) = -(a-t)^n (n+1)$$

u et v sont C^1 sur $[0, a]$ donc on peut intégrer par parties

et en a .

$$\left[\frac{(a-t)^{n+1}}{(n+1)(1-t)^{n+1}} \right]_0^a + \int_0^a \frac{(a-t)^n}{(1-t)^{n+1}} dt.$$

$$= -\frac{a^{n+1}}{n+1} + R_n(a) = R_{n+1}(a)$$

$$\Rightarrow R_n(a) = R_{n+1}(a) + \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

12) : Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^+ : P_n: f(a) = S_n(a) + R_n(a)$ par récurrence

I) pour $n=1$ on a : $S_1(a) + R_1(a) = a + R_1(a) = f(a)$ donc I ok

II) Supposons P_n vrai pour un rang $n \in \mathbb{N}^+$ fixé et montrons P_{n+1}

$$\text{on a. } S_{n+1}(a) + R_{n+1}(a) = S_{n+1}(a) + R_n(a) - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a^k}{k} + R_n(a) - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{a^k}{k} + R_n(a) = S_n(a) + R_n(a) = f(a)$$

Donc II ok

Conclusion: par principe de récurrence, P_n vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$

13) : Montrons que $\forall t \in [0, a] \quad 0 \leq \frac{a-t}{1-t} \leq a$.

on a $0 \leq t \leq a$.

$\Rightarrow -a \leq -t \leq 0 \quad | \quad 1-a \leq 1-t \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq a-t \leq a \quad | \quad \Rightarrow 1-a \leq 1-t \leq 1$

$\Rightarrow 1 \leq \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-a}$

$\Rightarrow \underline{0 \leq \frac{a-t}{1-t} \leq \frac{a}{1-a} \leq a} \quad \text{car } 1-a < 1$

b) : Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^+ \quad 0 \leq R_n(a) \leq \frac{a^{n+1}}{1-a}$

on a $0 \leq \frac{a-t}{1-t} \leq a \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{(a-t)^n}{(1-t)^{n+1}} \leq \frac{a^{n+1}}{1-t}$

$\Rightarrow 0 \leq R_n(a) \leq \int_0^a \frac{a^n}{1-t} dt = a^n \times \ln \frac{1}{1-a}$

J'en ai aboutis pas.

c) on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^{n+1}}{1-a} = 0 \quad \text{car } a \in]-1, 1[\Rightarrow \text{par encadrement}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(a) = 0 \quad \text{car } f(a) = S_n(a) + R_n(a) \Rightarrow f(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(a) + R_n(a)$

d'où $f(a) = S(a)$

$= S(a)$

Numéro d'inscription

0 5 1 2 0



Né(e) le

2 1 / 0 5 / 2 0 0 6

Signature

Nom

C H A I L L O U

Prénom (s)

N O A H

Épreuve : Mathématiques Appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0 6 / 0 7

Numéro de table

0 4 4

Exercice 2

14) a) x

b) x

c) : $S_n \left(\frac{1}{2} \right)$ correspond à la suite de point rouge $-S_n \left(-\frac{1}{2} \right)$ correspond aux trois bleus
Exercice 3

$$s(t) = x(t) + y(t)$$

$$1) \underline{s'(t)} = x'(t) + y'(t) = x(t) + y(t) - x(t) - y(t) = 0$$

$$2) \text{ on a } \cancel{\text{donc } x'(t) + y'(t) = 0 \Rightarrow x'(t) = -y'(t)} \\ \Rightarrow \cancel{x(t) = -y(t)}$$

$$\text{on a } s'(t) = 0 \Rightarrow s \text{ est constante} \Rightarrow \underline{x(t) + y(t) = c} \text{ avec } c \text{ une constante}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$3) \text{ on a } x(t) + y(t) = c$$

$$\Rightarrow x(t) = c - y(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = -c + y(t) - y(t) \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = -c \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\text{on a } y'(t) = -c \Rightarrow y(t) = -c t + \lambda \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad \text{et } \lambda \text{ une constante}$$

$$\text{de plus } y(0) = 1 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow y(t) = -c t + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'(t) = x(t) - c t + 1 \\ y(t) = -c t + 1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

Partie II

1) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ on a P qui est triangulaire elle est donc inversible

et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et on a $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(-1-\lambda) + 1 \\ = -1 - \lambda + \lambda + \lambda^2 + 1 = \lambda^2 \Rightarrow \text{sp}(A) = \{0\}$$

et 0 est de manière évidente valeur propre de A car les 2 colonnes de la matrice sont identiques donc 0 est l'unique valeur propre de A

soit $R = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on a $AR = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ -x-y=0 \end{cases} \Rightarrow x = -y;$

$\Rightarrow$ le sous espace propre associé à 0 est donc

$E_0 = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ et $\dim(E_0) = 1 < 2$ donc A n'est pas diagonalisable

$$\text{7) on a } \underline{P^{-1} A P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{J}$$

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases} \Rightarrow X'(t) = A X(t)$$

8)

$$9) \quad Y \Leftrightarrow X'(t) = A X(t) \quad \text{or} \quad J = P^{-1} A P \Rightarrow P J P^{-1} = A$$

$$\Rightarrow Y \Leftrightarrow X'(t) = P J P^{-1} X(t) \Leftrightarrow P^{-1} X'(t) = J P^{-1} X(t)$$

$$\Leftrightarrow \underline{Y'(t) = J Y(t)}$$

$$10) \quad Y'(t) = J Y(t) \Rightarrow \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = v(t) \\ v'(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u'(t) = \lambda \\ v(t) = \lambda \end{cases} \quad \text{avec } \lambda \text{ une constante réelle}$$

$$\Rightarrow u(t) = \lambda t + c \quad \text{avec } c \text{ une constante réelle}$$

Numéro d'inscription

0 5 1 2 0



Né(e) le

2 1 / 0 5 / 2 0 0 6

Signature

Nom

C H A I L L O U

Prénom(s)

N O A H



Épreuve :

Mathématiques Appliquées

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement
renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0 7

/ 0 7

Numéro de table

0 4 4

Suite exercice 3

on a donc
$$X(t) = \begin{pmatrix} \lambda t + c \\ \lambda \end{pmatrix}$$

7-1) on a
$$Y(t) = P^{-1} X(t)$$

$$\Rightarrow P Y(t) = X(t)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda t + c \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda t + c = x(t) \\ -\lambda t + c + \lambda = y(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Donc les solus de } \mathcal{Y} \text{ sont } \begin{cases} x(t) = \lambda t + c \\ y(t) = -\lambda t + c + \lambda \end{cases}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

Partie III

```
12) def ValM1:  
    p = 1  
    if  $M * 1000000! = n p. \text{zeros}$ .  
        p = 0  
    else:  
        while  $M * M! = n p. \text{zeros}$ .  
            p = p + 1.  
    return p
```