EC-02760

CAPDEVIELLE

Maé

12/04/2006

Note de délibération : 17.32 / 20

Numéro d'inscription 02760

Né(e) le 12/04/2006

Nom CAPDEVIELLE

Prénom (s) MAÉ

Signature

écricome Épreuve : MATHÉMATIQUES

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01/06

Numéro de table 074

Exercice 1 :

Partie 1 :

1 : Par principe de récurrence on pose une proposition P_n telle que "$a_n + b_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$".

Initialisation : Montrons que la proposition est vraie au rang 0 :
$P_0 : a_0 + b_0 = 1 + 0 = 1$.
Donc P_0 est vraie pour $\forall n \in \mathbb{N}$.

Hérédité : Supposons P_n comme vraie pour un certain n appartenant à $\mathbb{N}$, et montrons que P_{n+1} l'est aussi :

$$P_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}$$
$$= \frac{7}{10} a_n + \frac{1}{10} b_n + \frac{3}{10} a_n + \frac{9}{10} b_n$$
$$= a_n + b_n$$
$$= 1 \quad \text{selon l'hypothèse de récurrence.}$$

Donc la proposition est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : La proposition P_n est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Les concours ECRICOME sont des marques déposées. Toute reproduction de la copie est interdite. Copyright © ECRICOME – Tous droits réservés

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

2 : (a) Par principe de récurrence on pose : P_n : « $a_{n+1} = \frac{3}{5} a_n + \frac{1}{10}$, $n \in \mathbb{N}$ ».

Initialisation : Montrons que la proposition est vraie au rang 0 :

$P_0 = a_{0+1} = \frac{3}{5} a_0 + \frac{1}{10} = \frac{3}{5} + \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$

Hérédité : Supposons P_n comme vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et montrons que P_{n+1} l'est aussi :

P_{n+1} : $a_{n+2} = \frac{3}{5} a_{n+1} + \frac{1}{10}$

$= \frac{3}{5}\left(\frac{3}{5} a_n + \frac{1}{10}\right) + \frac{1}{10}$ par hypothèse de récurrence

$= \frac{9}{25} a_n + \frac{3}{50} + \frac{1}{10}$

$= \frac{3}{5} a_n + \frac{3+5}{50}$

$= \frac{3}{5} a_n + \frac{8}{50} = \frac{3}{5} a_n + \frac{4}{25}$

Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et $n+1$, donc P_n est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

(b) On cherche le réel ℓ tel que « $\ell = \frac{3}{5}\ell + \frac{1}{10}$ »

On pose :

$\ell = \frac{3}{5}\ell + \frac{1}{10}$

$\iff \frac{3}{5}\ell + \frac{1}{10} - \ell = 0$

$\Leftrightarrow \frac{3}{5}\ell - \ell = -\frac{1}{10}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{5} - \frac{5}{5}\ell = -\frac{1}{10}$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{5}\ell = -\frac{1}{10}$

$\Leftrightarrow \ell = \frac{-\frac{1}{10}}{\frac{-2}{5}}$ $\Leftrightarrow \ell = -\frac{1}{10} \times \left(-\frac{5}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \ell = \frac{5}{20}$ $\Leftrightarrow \boxed{\ell = \frac{1}{4}}$

On vérifie : $\frac{3}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{3}{20} + \frac{2}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

(c) On a : $V_n = a_n - \ell$ et $n \geq 0$.

On pose : $V_{n+1} = a_{n+1} - \ell$

$= \frac{3}{5}a_n + \frac{1}{10} - \ell$ d'après $\underline{2.(a)}$

$= \frac{3}{5}a_n + \frac{1}{10} - \frac{3}{5}\ell - \frac{1}{10}$ d'après $\underline{2.(b)}$

$= \frac{3}{5}(a_n - \ell)$

$= \frac{3}{5}V_n$

Donc V_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{5}$ et de premier terme $V_0 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Donc $V_n = V_0 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n$

(d) Par principe de récurrence on pose : P_n : " $a_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ " pour $\forall n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Montrons que la proposition est vraie au rang 0 :

$P_0 : a_0 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{3}{5}\right)^0 = \frac{4}{4} = 1$

La proposition est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons P_n vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et montrons que P_{n+1} l'est aussi :

P_{n+1} : $a_{n+1} = \frac{3}{5} a_n + \frac{1}{10}$

$= \frac{3}{5}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{3}{5}\right)^n\right) + \frac{1}{10}$ par hypothèse de récurrence

$= \frac{3}{20} + \frac{9}{20}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n \times \frac{3}{5}\right) + \frac{1}{10}$

$= \frac{5}{20} + \frac{9}{20}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$

$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$

Donc la proposition est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : P_n est vraie c'est-à-dire : $a_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

3 : (a) On sait que $a_n + b_n = 1$.

Donc $a_n + b_n = 1$

$\Leftrightarrow b_n = 1 - a_n$

$\Leftrightarrow b_n = 1 - \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ d'après 2.(d)

$\Leftrightarrow b_n = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{3}{5}\right)^n$

$\Leftrightarrow b_n = \frac{3}{4}\left(1 + \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)$

(b) $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{4}\left(1 + \left(\frac{3}{5}\right)^n\right) = +\infty$

4 :

```
def rang(S)
    b=0
    n=0
    while b>=S :
        n= n+1
        b=(3/10)*a +(9/10)*b
    return n.
```

Numéro d'inscription 02760

Né(e) le 12/04/2006

Signature

Nom CAPDEVIELLE

Prénom (s) MAÉ

Écricome Épreuve : MATHÉMATIQUES

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02/06

Numéro de table 74

Partie 2 :

5 : (a) $QP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -9 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = 12 I_3$$

(b) $QP = 12I$

P est inversible par définition, en effet si le produit de 2 matrices est égal à la matrice identité alors elles sont inversibles.

Donc : $P^{-1} = \frac{1}{12} Q$

6 : (a)

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ici : $M\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 10\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur

Les concours ECRICOME sont des marques déposées. Toute reproduction de la copie est interdite. Copyright © ECRICOME – Tous droits réservés

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

propre de M associé à la valeur propre 10.

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ici : $M\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$ donc $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 6.

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Ici : $M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 10\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \neq 0$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 10.

(b)

$PD = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & -6 & 10 \\ 30 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$

$PDP^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -9 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 10 & -6 & 10 \\ 30 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 84 & 12 & 12 \\ 36 & 108 & -12 \\ 0 & 0 & 120 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M$

Donc $M = PDP^{-1}$.

7: @ On pose par principe de récurrence : $P_n = "M^n = \frac{1}{12} PD^n Q"$ avec $\forall n \in \mathbb{N}$.

Initialisation: Montrons que P_0 est vraie :

$P_0 = M^0 = \frac{1}{12} PD^0 Q = P\frac{1}{12} Q = PP^{-1} = I_3$

Donc P_n est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons P_n vraie et montrons que P_{n+1} l'est aussi :

P_{n+1} : $M^{n+1} = M^n \times M$

$= PD^n \frac{1}{12} Q \times PDP^{-1}$ d'après 6b et (HR)

$= PD^{n+1} P^{-1}$

$= \frac{1}{12} PD^{n+1} Q$

Donc P_n est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : par principe de récurrence P_n est vraie pour $\forall n \in \mathbb{N}$ c'est-à-dire : $M^n = \frac{1}{12} PD^n Q$.

b)

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -9 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

c) $PD^n = \begin{pmatrix} 10^n & (-6)^n & 10^n \\ 30^n & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 30^n \end{pmatrix}$ (construit à l'aide de 6b).

$$\begin{pmatrix} 10^n & (-6)^n & 10^n \\ 30^n & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 30^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2(10^n) + (-6^n) \times (-6) + 4(10^n) \\ 2(30^n) + 6^n \times (-6) \\ 4(30^n) \end{pmatrix}$$

Numéro d'inscription 02760

Né(e) le 12/04/2006

Signature

Nom CAPDEVIELLE

Prénom (s) MAÉ

Écricome Épreuve : MATHÉMATIQUES

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03/06

Numéro de table 74

$$= 2 \begin{pmatrix} 10^n + (-6^n) \times (-3) + 2(10^n) \\ 30^n + 6^n \times (-3) \\ 2(30^n) \end{pmatrix}$$

$$= 2^{n+1} \begin{pmatrix} 5^n + (-3^n) \times (-3) + 2(5^n) \\ 15^n + 3^n \times (-3) \\ 2 \times 15^n \end{pmatrix}$$

$$= 2^{n-1} \begin{pmatrix} 5^n + 3^n \\ 5^n - 3^n \\ 2 \times 5^n \end{pmatrix}$$

8 : a) $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} x_n + \frac{1}{10} y_n + \frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} x_n + \frac{9}{10} y_n - \frac{1}{10} \\ 1 \end{pmatrix}$

On calcule $\frac{1}{10} M \times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix}$:

Les concours ECRICOME sont des marques déposées. Toute reproduction de la copie est interdite. Copyright © ECRICOME – Tous droits réservés

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7x_n + y_n + 1 \\ 3x_n + 9y_n - 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{7}{10}x_n + \frac{1}{10}y_n + \frac{1}{10} \\ \frac{3}{10}x_n + \frac{9}{10}y_n - \frac{1}{10} \\ 1 \end{pmatrix}$$ Donc $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} M \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix}$

(b)

Exercice 2 :

Partie 1 :

1 : @ $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 1 - x e^{1-x} = \begin{cases} e^{1-x} = +\infty \\ x e^{1-x} = +\infty \\ \text{par croissance comparée} \end{cases}$

$= +\infty$

@ $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - x e^{1-x} = \begin{cases} e^{1-x} = 0 \\ x e^{1-x} = 0 \end{cases}$

$= 1$

Lorsque x tend vers $-\infty$, C_g admet une asymptote verticale.
Lorsque x tend vers $+\infty$, C_g admet un asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

2 : @ $g(x) = 1 - x e^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

$(uv)' = u'v + uv'$ et $(e^u)' = u' e^u$

$u = x$ $\quad v = e^{1-x}$

$u' = 1$ $\quad v' = -e^{1-x}$

$$g'(x) = 0 - \left(1 \times e^{1-x} + x \times (-e^{1-x})\right)$$
$$= 0 - (e^{1-x} - x e^{1-x})$$
$$= -e^{1-x} + x e^{1-x} = e^{1-x}(x - 1)$$

@ $e^{1-x} > 0$ et $x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

$g(1) = 1 - e^0 = 1 - 1 = 0$

$g'(2) = e^{1-2}(2-1)$

$= e^{-1} \times 1 = \underline{e^{-1} \approx 0{,}37}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	ϕ	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	1

3 : @ $g'(x) = e^{1-x}(x-1)$

$u = e^{1-x}$ $\quad v = x-1$

$u' = -e^{1-x}$ $\quad v' = 1$

$g''(x) = -e^{1-x} \times (x-1) + e^{1-x} \times 1$

$= -x e^{1-x} + e^{1-x} + e^{1-x}$

$= -x e^{1-x} + 2e^{1-x}$

$= \underline{e^{1-x}(2-x)}$

@ $g''(x) = e^{1-x}(2-x)$

$e^{1-x} \geqslant 0$ (car fonction exponentielle).

Donc $g''(x)$ est du signe de $2-x=0$

$\Leftrightarrow \underline{2 = x}$

g est donc <u>convexe sur</u> $]-\infty, 2]$ et <u>concave sur</u> $[2, +\infty[$.

En effet son <u>point d'inflexion est $x=2$</u>, c'est le point où la convexité de g change.

Numéro d'inscription 02760

Né(e) le 12/04/2006

Signature

Nom CAPDEVIELLE

Prénom (s) MAÉ

Écricome Épreuve : mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04/06

Numéro de table 74

4:@ $T : y = g'(a)(x - a) + g(a)$

$g'(2) = e^{1-2}(2-1)$

$= e^{-1} \times 1 = e^{-1} \approx 0,37$

$g(2) = 1 - 2 \times e^{1-2}$

$= 1 - 2e^{-1}$

$= 1 - 0,74$

$= 0,26$

$T : y = 0,37(x - 2) + 0,26$

$= 0,37x - 0,74 + 0,26$

$= 0,37x - 0,48$

(b) De $]-\infty, 2]$ T se trouve au dessus de $\mathcal{C}$ et de $[2, +\infty[$ T se trouve en dessous.

Les concours ECRICOME sont des marques déposées. Toute reproduction de la copie est interdite. Copyright © ECRICOME – Tous droits réservés

NE RIEN ÉCRIRE

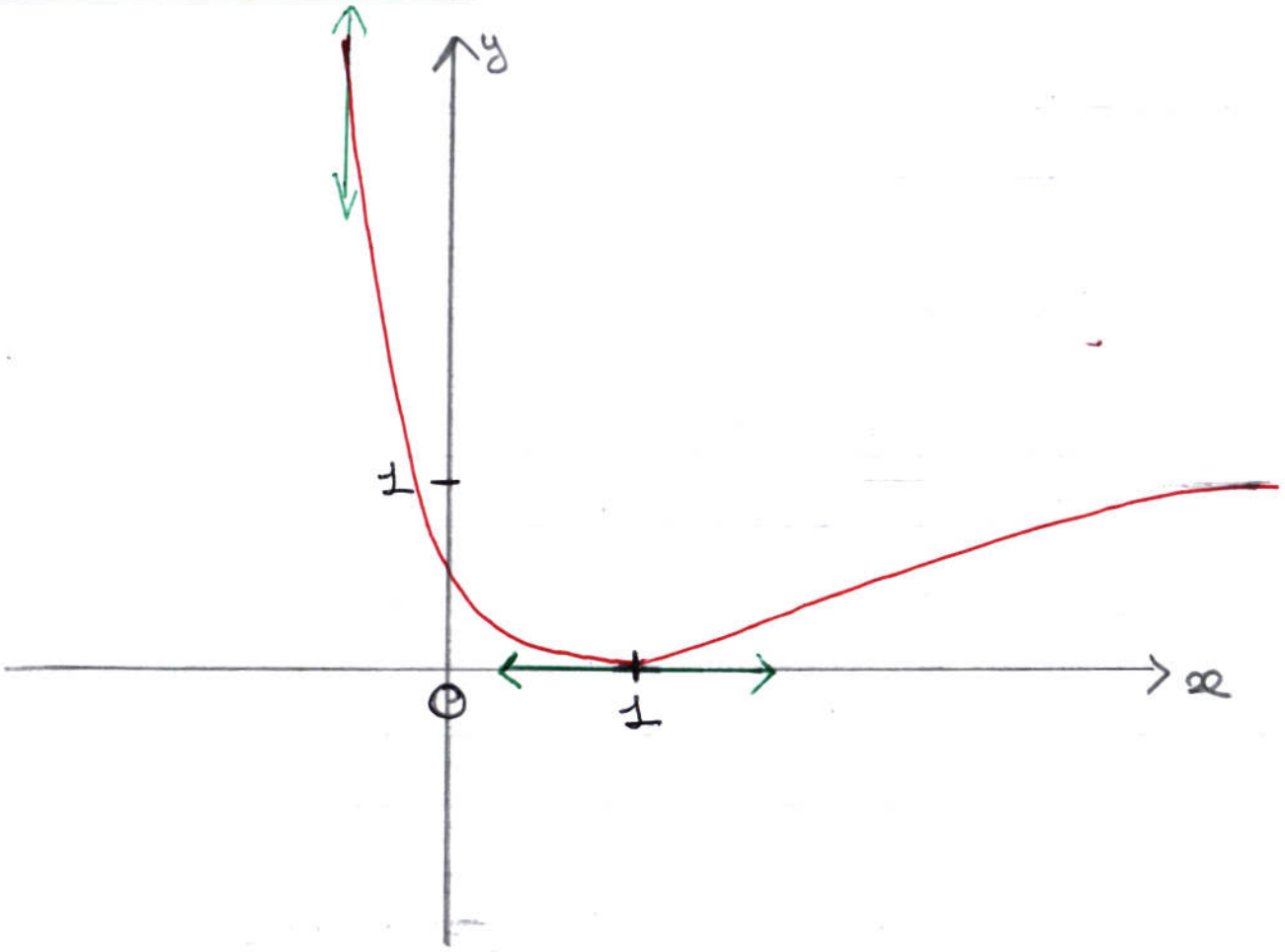
DANS CE CADRE

5: $T : y = g'(0)(x-0) + g(0)$

$g'(0) = e^{1-0}(0-1) = -e^1 = -2,72$

$g(0) = 1 - 0 \times e^1 = 1$

$y = -2,72x + 1$



Partie 2:

6: ⓐ $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,dt$; soit $x \geq e$

$$\int_e^x t^{-3}\,dt = \left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_e^x = \left(\frac{x^{-2}}{-2} + \frac{e^{-2}}{2}\right)$$

ⓑ pour $x > e$:

$$\int_e^{+\infty} \frac{\ln(t)-1}{t^3}\,dt$$

IPP $= [u \times v]_a^b - \int_a^b u'v\,dt$.

$$\int_e^x \frac{1}{t^3} \times \ln(t) - 1\,dt$$

$u = (\ln(t) - 1)$ $\quad v = \frac{t^{-2}}{-2}$

$u' = \frac{1}{t}$ $\quad v' = t^{-3}$

$$= \left[(\ln(t)-1) \times \frac{t^{-2}}{-2}\right]_e^x - \int_e^x \frac{1}{t} \times \frac{1}{t^3}\,dt$$

$$= \left((\ln(x)-1) \times \frac{x^{-2}}{-2} - (\ln(e)-1) \times \frac{e^{-2}}{-2}\right) - \int_e^x t^{-4}\,dt$$

$$= \frac{x^{-2}\ln(x)}{-2} + \frac{x^{-2}}{2} - 0 - \left[\frac{t^{-3}}{-3}\right]_e^x$$

$$= \frac{x^{-2}\ln(x)}{-2} + \frac{x^{-2}}{2} - \left(\frac{x^{-3}}{-3} + \frac{e^{-3}}{3}\right)$$

$$= \ln(x) \times \left(\frac{-1}{2x^2}\right) + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{3e^3}$$

@ d'après 6@ $\int_e^x \frac{\ln(t)-1}{t^3} = \frac{1}{2x^2}\left(\frac{1}{2} - \ln(x)\right) + \frac{1}{4e^2}$

Donc $\int_e^x 4e^2 \frac{\ln(t)-1}{t^3}\,dt$

$= 4e^2 \times \left(\frac{1}{2x^2}\left(\frac{1}{2} - \ln(x)\right) + \frac{1}{4e^2}\right)$

$\xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{4e^2}{4e^2} = 1$

car $\frac{1}{2x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

f est continue sur $]-\infty, e]$ car 0 est une constante, et elle est également sur $[e, +\infty[$.

$\lim\limits_{x \to e^-} 0 = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to e^+} 4e^2 \frac{\ln(t)-1}{t^3} = \frac{-4e^2}{e^3} = \frac{-4}{e}$

f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf au point d'abscisse e.

f est positive : ($\geqslant 0$).

- $t < e$: 0
- $t \geqslant e$: $4e^2 \geqslant 0$
  $t^3 \geqslant 0$
  $\ln(t) - 1 \geqslant 0$

Donc f est une densité de probabilité.

7 : @ $F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt$.

Pour $t < e$: $\int_{-\infty}^x 0\,dt = 0$

Numéro d'inscription 02760

Né(e) le 19/04/2006

Signature

Nom CAPDEVIELLE

Prénom (s) MAÉ

Écricome Épreuve : mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05/06

Numéro de table 74

Pour $t \geq e$: $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{e} 0\,dt + \int_{e}^{x} 4e^2 \frac{\ln(t)-1}{t^3}\,dt$

$= 0 + 4e^2\left(\frac{1}{2e^2}\left(\frac{1}{2} - \ln(x) + \frac{1}{4e^2}\right)\right)$ d'après 6b

$= \frac{4e^2}{2x^2} \times \left(\frac{4e^2}{2} - 4e^2\ln(x) + \frac{4e^2}{4e^2}\right)$

$= \frac{2e^2}{x^2} \times \left(2e^2 - 4e^2\ln(x) + 1\right) = \frac{4e^4}{x^2} - \frac{8e^4\ln(x)}{x^2} + \frac{2e^2}{x^2}$

$= \frac{6e^2 - 8e^4\ln(x)}{x^2} = \frac{2e^2(3 - 4\ln(x))}{x^2}$

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{2e^2(3-4\ln(x))}{x^2} & t \geq e \\ 0 & t < e \end{cases}$$

c) $P([X \leq e^2]) = \frac{2e^2(3-4\ln(e^2))}{x^2}$

$= \frac{2e^2(3-4\times 2)}{x^2} = \frac{2e^2\times(3-8)}{x^2}$

$= \frac{2e^2 \times (-24)}{x^2} = \frac{-48e^2}{x^2}$

Les concours ECRICOME sont des marques déposées. Toute reproduction de la copie est interdite. Copyright © ECRICOME – Tous droits réservés

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$P(e^2 < X \leq e^3) = F_X(e^3) - F_X(e^2)$$

$$= \frac{2e^2(3-4\ln(e^3))}{x^2} + \frac{48e^2}{x^2}$$

$$= \frac{2e^2(3-4\times 3)}{x^2} + \frac{48e^2}{x^2}$$

$$= \frac{2e^2(3-12)}{x^2} + \frac{48e^2}{x^2}$$

$$= \frac{2e^2\times(-9)}{x^2} + \frac{48e^2}{x^2}$$

$$= \frac{-18e^2}{x^2} + \frac{48e^2}{x^2} = \frac{30e^2}{x^2}$$

8: ⓐ $g(x) = -\frac{\ln(x)}{x}$ $\left(= -\ln(x) \times \frac{1}{x}\right)$

$$g'(x) = -\frac{1}{x} \times \frac{1}{x} + \left(-\ln(x) \times \left(\frac{-1}{x^2}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(\ln(x) - 1\right)$$

ⓑ $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \times g(x)\, dx$

$$= \int_e^{+\infty} x \times \frac{\ln(x)}{x}\, dx = \int_e^{+\infty} -\ln(x)\, dx$$

Partie 3 :

1) : ⓐ $f_n(1) = (1 - 1 \times e^{1-1})^n$
$= (1 - 1 \times e^0)^n = 0^n = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} (1 - x e^{1-x})^n = \begin{cases} e^{1-x} \to 0 \\ x e^{1-x} \to 0 \end{cases} \quad = 1^n = 1$$

ⓑ $f_n(x) = (1 - x e^{1-x})^n$ avec $x \in [1, +\infty[$ est croissante car : la fonction exponentielle est croissante et $f_n(x) \geq 0$.

Exercice 3 :

1) : ⓐ R compte le nombre de fautard tirés (succès) pendant n expériences, avec remise. Il s'agit d'une répétition de loi de Bernoulli donc :

$R \hookrightarrow \mathcal{B}(\llbracket n, \frac{3}{10} \rrbracket)$
$R(\Omega) = \llbracket 0, 3 \rrbracket$

$P(R=k) = \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} p^k$
$= \binom{n}{k} \left(1 - \frac{3}{10}\right)^{n-k} \left(\frac{3}{10}\right)^k$
$= \binom{n}{k} \left(\frac{7}{10}\right)^{n-k} \times \left(\frac{3}{10}\right)^k$

⑥ $E(R) = np$ $\quad V(R) = np(1-p)$

$= n \times \frac{3}{10} = \frac{3n}{10}$ $\quad = \frac{3n}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{21n}{100}$

2 : ⓐ $P(S=0) = P(R=0) + P(C=0)$

$=$

ⓑ $S \hookrightarrow B\left([\![n, \frac{8}{10}]\!]\right)$

ⓒ $E(S) = \frac{8n}{10} = \frac{4n}{5}$ $\quad V(X) = \frac{4n}{5}\left(1 - \frac{4}{5}\right)$

$= \frac{4n}{5} \times \frac{1}{5}) = \frac{4n}{25}$

3 : Covariance : $E(R,C) + E(R) \times E(C)$

ⓐ

$E(C) = \frac{n}{2}$.

$E(R) \times E(C) = \frac{3n}{10} \times \frac{n}{2} = \frac{3n^2}{20}$

Partie 3 :

1.0 : SELECT ref, tissu, motif, quantite
FROM fauteuils

1.1 : La clé primaire est ref car elle permet d'identifier de manière unique chaque enregistrement.

Numéro d'inscription 02760

Né(e) le 12/04/2006

Signature

Nom CAPDEVIELLE

Prénom (s) MAE

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06/06

Numéro de table 74

12 : UPDATE foulards.ref = 26 ECR
VALUES (prise = 72).

13 : Cette requête permet d'afficher tous les foulards qu'une quantité supérieure ou égale à 20 et d'un delai de livraison supérieur ou égal a 35 jours.

Partie 2 :

5 : ⓐ T suit une loi géométrique qui compte l'attente avant le 1er succès, ici obtenir un foulard à carreaux ou des instruments.

ⓑ $E(T) = \frac{1}{p} = \frac{1}{8/10} = 1 \times \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

$V(T) = \frac{(1-p)}{p^2} = \frac{\frac{1}{5}}{\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{1}{5} \times \frac{25}{16} = \frac{25}{80}$

6 : ⓐ $N(\Omega) = [\![0, k]\!]$.

Les concours ECRICOME sont des marques déposées. Toute reproduction de la copie est interdite. Copyright © ECRICOME – Tous droits réservés

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE