

EC-03252

ZAPOLSKI

Maureen

08/07/2006

Note de délibération : 19.23 / 20

Numéro d'inscription

03252



Né(e) le

08 / 07 / 2006

Signature

Nom

ZAPOLSKI

Prénom (s)

MAUREEN

Épreuve : Mathématiques - option ECT

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille ☐ 01 / ☐ 07

Numéro de table

29

Exercice 1:

Partie 1:

$$1) \forall m \in \mathbb{N}, \text{ posons } P(m): a_m + b_m = 1$$

Initialisation:

$$P(1): a_1 + b_1 = 1$$

$$\Rightarrow 1 + 0 = 1$$

$$\Rightarrow 1 = 1$$

Ce qui est vrai

Hérédité: supposons que pour un entier fixé $m \geq 0$ $P(m)$ soit vrai et montrons que $P(m+1)$ l'est aussi.

$$P(m+1): a_{m+1} + b_{m+1} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Or } a_{m+1} + b_{m+1} &= \frac{7}{10} a_m + \frac{1}{10} b_m + \frac{3}{10} a_m + \frac{9}{10} b_m \\ &= \frac{7}{10} + \frac{3}{10} \quad \text{car } a_m = 1 \text{ et } b_m = 0 \text{ d'après } P(m) \\ &= \frac{10}{10} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc $P(m+1)$ est vrai

Par récurrence, $P(m)$ est vrai $\forall m \in \mathbb{N}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$2) a. \forall m \in \mathbb{N}, a_{m+2} = \frac{7}{10} a_m + \frac{1}{10} b_m$$

$$= \frac{7}{10} a_m + \frac{1}{10} (1 - a_m) \text{ car } a_m + b_m = 1 \Rightarrow b_m = 1 - a_m$$

$$= \frac{7}{10} a_m + \frac{1}{10} - \frac{1}{10} a_m$$

$$= \frac{6}{10} a_m + \frac{1}{10}$$

$$= \frac{3}{5} a_m + \frac{1}{10}$$

$$b. \text{ Posons } l = \frac{3}{5} l + \frac{1}{10}$$

$$\Leftrightarrow l - \frac{3}{5} l = \frac{1}{10}$$

$$\Leftrightarrow 2l = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow l = \frac{1}{4}$$

$$c. \forall m \in \mathbb{N}, \sigma_m = a_m - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sigma_{m+2} = a_{m+2} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{5} a_m + \frac{1}{10} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{5} a_m - \frac{3}{20}$$

$$= \frac{3}{5} \left(a_m - \frac{1}{4} \right)$$

$$= \frac{3}{5} \sigma_m$$

Donc $\forall m \in \mathbb{N}, (\sigma_m)$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{5}$

$$d. \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall m = a_m - l$$

$$\Rightarrow a_m = \forall m + l$$

$$= \sigma_0 \times \left(\frac{3}{5}\right)^m + \frac{1}{4}$$

car (σ_m) est une suite géométrique
de raison $q = \frac{3}{5}$

$$= (a_0 - l) \left(\frac{3}{5}\right)^m + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{5}\right)^m + \frac{1}{4}$$

$$3) a. \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad a_m + b_m = 1$$

$$\Rightarrow b_m = 1 - a_m$$

$$= 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{3}{5}\right)^m$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{3}{5}\right)^m$$

$$b. \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{3}{4} \left(\frac{3}{5}\right)^m = 0 \quad \text{car } \left|\frac{3}{5}\right| < 1$$

$$\text{Donc } \lim_{m \rightarrow +\infty} b_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{3}{5}\right)^m = \frac{3}{4}$$

4) while $b < s$:

$$m = m + 1$$

$$b = (3/4) - (3/4) * (3/5) ** m$$

Partie 2:

$$\begin{aligned} 5) a. \quad QP &= \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \\ &= \underline{12I} \end{aligned}$$

b. Soit $QP = 12I$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{12} Q\right)P = I$$

Donc P est inversible d'inverse $P^{-1} = \underline{\frac{1}{12} Q}$

6) a. Soit $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ un vecteur non nul tel que

$$\begin{aligned} MX_1 &= \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \underline{10X_1} \end{aligned}$$

Donc X_1 (vecteur non nul) est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 10.

$$\begin{aligned} \text{Soit } X_2 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } MX_2 = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \underline{6X_2} \end{aligned}$$

Donc X_2 (vecteur non nul) est vecteur propre de M associé à la valeur propre 6

Numéro d'inscription

03252



Né(e) le

08 / 07 / 2006

Signature

Nom

ZAPOLSKI

Prénom (s)

MAUREEN

Ecricome

Épreuve : Mathématiques

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

02

/ 02

Numéro de table

29

$$\text{Soit } X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{on a } MX_3 = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a } MX_3 = \underline{10X_3}$$

Donc X_3 (un vecteur non nul) est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 10.

$$\text{b. Soit } MP = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -6 & 10 \\ 30 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } PD = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -6 & 10 \\ 30 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a } MP = PD$$

$$\Rightarrow MPP^{-1} = PDP^{-1} \quad \text{car } P \text{ est inversible}$$

$$\Rightarrow M = \underline{PDP^{-1}}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

7) a. $\forall m \in \mathbb{N}$, posons $P(m): M^m = \frac{1}{12} P D^m Q$

Initialisation:

$$P(0): M^0 = \frac{1}{12} P D^0 Q$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{12} P Q$$

$$\Rightarrow I = P \frac{1}{12} Q$$

$$\Rightarrow I = P P^{-1}$$

$$\Rightarrow I = I$$

Ce qui est vrai.

Hérédité: supposons que pour un entier fixé m , 0 $P(m)$ soit vrai et montrons que $P(m+1)$ l'est aussi.

$$P(m+1): M^{m+1} = \frac{1}{12} P D^{m+1} Q$$

$$D'après $P(m): M^m = \frac{1}{12} P D^m Q$$$

$$\Rightarrow M \cdot M^m = M \cdot \frac{1}{12} P D^m Q$$

$$\Rightarrow M^{m+1} = \frac{1}{12} M P D^m Q$$

$$= \frac{1}{12} P D D^m Q \quad \text{car } MP = PD$$

$$= \frac{1}{12} P D^{m+1} Q$$

On obtient $M^{m+1} = \frac{1}{12} P D^{m+1} Q$, donc $P(m+1)$ est vrai.

Par récurrence, $P(m)$ est vrai $\forall m \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \text{b. } Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c. Set $M^n = \frac{1}{12} P D^n Q$

$$\Rightarrow M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} P D^n Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10^n & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 10^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \times 10^n & -\frac{1}{12}(6)^n & \frac{1}{12} \times 10^n \\ \frac{3}{4} \times 10^n & \frac{1}{12}(6)^n & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \times (10)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a. Soit $\frac{1}{10} M \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{8}{10} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{7}{10} x_m + \frac{1}{10} y_m + \frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} x_m + \frac{8}{10} y_m - \frac{1}{10} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ y_{m+1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

b. $\forall m \in \mathbb{N}$, posons $P(m) : \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10^m} M^m \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Initialisation:

$$P(0) : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10^0} M^0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hérédité: supposons que pour un entier (fixé m), $P(m)$ soit vrai et montrons que $P(m+1)$ l'est aussi.

$$P(m+1) : \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ y_{m+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10^{m+1}} M^{m+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Numéro d'inscription

0	3	2	5	2	
---	---	---	---	---	--



Né(e) le

0	8	/	0	7	/	2	0	0	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Signature

Nom

Z	A	P	O	L	S	K	I												
---	---	---	---	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Prénom (s)

M	A	U	R	E	E	N													
---	---	---	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0	3	/		
---	---	---	--	--

Numéro de table

2	9	
---	---	--

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

Exercice 2:

Partie 1:

1) a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1-x = +\infty$ donc par composition $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty$

Par produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{1-x} = -\infty$

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - x e^{1-x} = +\infty$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1-x = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = 0$ par composition

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{1-x} = 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x e^{1-x} = 1$

Donc g admet une asymptote horizontale car quand x tend vers l'infini, g tend vers 1.

2) a. $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 1 - x e^{1-x}$

$$\begin{aligned} \text{Donc } g'(x) &= -((x e^{1-x}) + (x e^{1-x})') \\ &= -(e^{1-x} + x(1-x)e^{1-x}) \\ &= -e^{1-x} + x e^{1-x} \end{aligned}$$

b. Soit $g(x) = x e^{1-x} - e^{1-x}$
 $= e^{1-x}(x-1)$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{1-x} > 0$ et $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

D'où:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
e^{1-x}		+		+	
$x-1$		-	0	+	
signe de $g'(x)$		-	0	+	
variation de $y(x)$	$+\infty$				1

et $g(1) = 1 - 1 = 0$

3)a. $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^{1-x}(x-1)$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } g''(x) &= (e^{1-x})'(x-1) + e^{1-x}(x-1)' \\
 &= -e^{1-x}(x-1) + e^{1-x} \\
 &= e^{1-x}(-x+1+1) \\
 &= e^{1-x}(2-x)
 \end{aligned}$$

b. $\forall x \in \mathbb{R}, e^{1-x} > 0$

et $2-x > 0 \Leftrightarrow -x > -2$

$\Leftrightarrow x < 2$

Donc $\forall x < 2, g''(x) < 0$ donc g est concave

et $\forall x > 2, g''(x) > 0$ donc g est convexe

Comme $g''(x)$ change de signe en $x=2$, g admet un point d'inflexion en $x=2$

4)a. Une équation de la tangente est donnée par $y = g'(2)(x-2) + g(2)$

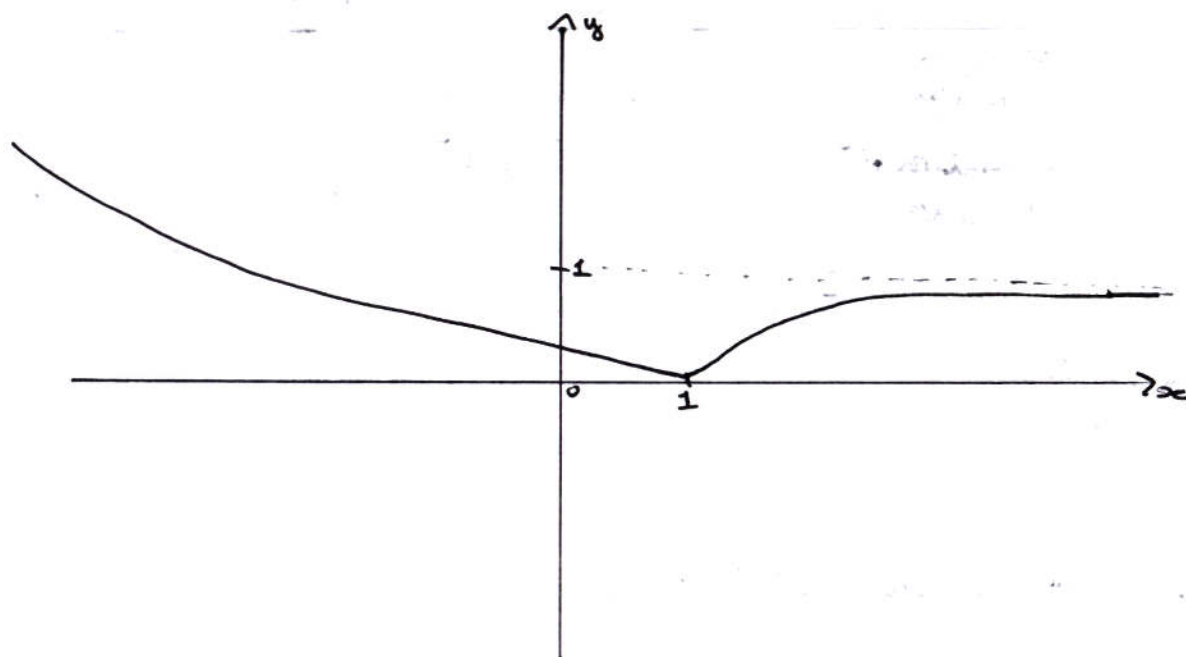
$\Rightarrow y = e^{-1}(x-2) + 1 - 2e^{-1}$

$\Rightarrow y = xe^{-1} - 2e^{-1} + 1 - 2e^{-1}$

$\Rightarrow y = e^{-1}(x-4) + 1$

b. g est concave $\forall x \leq 0$, donc sa courbe se situe sous sa tangente
 g est convexe $\forall x > 0$, donc sa courbe se situe au dessus de sa tangente

5)



Partie 2:

6) a. $\forall r > e$, $\frac{1}{r^3}$ a pour primitive $-\frac{1}{2r^2}$

$$b. \forall x > e, \int_0^x \frac{\ln(t)-1}{t^3} dt = \left[-\frac{\ln(t)-1}{2t^2} \right]_e^x - \int_e^x -\frac{1}{2t^3} dt$$

$$\text{avec } u = \ln(t)-1 \quad u' = \frac{1}{t}$$

$$v = -\frac{1}{2t^2} \quad v' = \frac{1}{t^3}$$

$$= -\frac{\ln(x)-1}{2x^2} + \frac{\ln(e)-1}{2e^2} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2t^2} \right]_e^x$$

$$= -\frac{\ln(x)-1}{2x^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2e^2} \right)$$

$$= -\frac{\ln(x)-1}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4e^2}$$

Numéro d'inscription

0 3 2 5 2



Né(e) le

0 8 / 0 7 / 2 0 0 6

Signature

Nom

Z A P O C S K I

Prénom (s)

M A N R E E N

Ecricome

Épreuve :

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0 4 / 0 7

Numéro de table

2 3

C. (1) $\forall t < e, f(t) = 0 \geq 0$

$$\forall t > e, f(t) = 4e^2 \frac{\ln(t)-1}{t^3} > 0 \text{ car } \forall t \geq e, \ln(t)-1 \geq 0 \\ \text{et } t^3 > 0 \text{ car } e > 0$$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \geq 0$

(2) $\forall t < e, f(t) = 0$ est continue (c'est une constante)

$\forall t > e, \ln(t)-1$ est continue car $t \mapsto \ln(t)$ continue sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$

$\frac{1}{t^3}$ est continue comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.

et $4e^2$ est une constante (donc continue).

Ainsi, $f(t) = 4e^2 \frac{\ln(t)-1}{t^3}$ est continue $\forall t > e$.

Donc f est continue sauf éventuellement en $t=e$ (nombre fini de point)

(3) $\forall t < e, f(t) = 0$ donc $\int_{-\infty}^e f(t) dt$ converge et vaut 0.

$$\forall x > e, \text{ on a } \int_e^x 4e^2 \frac{\ln(t)-1}{t^3} dt = 4e^2 \int_e^x \frac{\ln(t)-1}{t^3} dt \\ = \frac{4e^2}{2x^2} \left(\frac{1}{2} - \ln(x) \right) + 1 \\ = \frac{e^2}{x^2} - \frac{2e^2 \ln(x)}{x^2} + 1$$

Soit $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^2 \ln(x)}{x^2} = 0$ par croissance comparée

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^2}{x^2} = 0$$

On a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^2}{x^2} - \frac{2e^2 \ln(x)}{x^2} + 1 = 1$

Donc $\int_e^x f(t) dt$ converge et vaut 1.

Par la relation de Chasles, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut $0 + 1 = 1$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

Au bilan, les conditions (1) (2) et (3) sont respectées donc f est une densité de probabilité.

$$7) a. \forall x < e, F_x(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt \\ = 0$$

$$\forall x > e, F_x(x) = \int_{-\infty}^e f(t) dt + \int_e^x f(t) dt \\ = 0 + \int_e^x 4e^2 \frac{\ln(t)-1}{t^3} dt \\ = \frac{4e^2}{2x^2} \left(\frac{1}{2} \cdot \ln(x) \right) + \frac{1}{4e^2} \\ = \frac{e^2}{x^2} - \frac{2e^2 \ln(x)}{x^2} + \frac{1}{4e^2}$$

$$\text{On obtient donc } F_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < e \\ \frac{e^2 - 2e^2 \ln(x)}{x^2} + \frac{1}{4e^2} & \text{si } x > e \end{cases}$$

$$b. P(x \leq e^2) = F_x(e^2) \\ = \frac{e^2 - 2e^2 \ln(e^2)}{e^4} + \frac{1}{4e^2} \\ = \frac{e^2 - 4e^2}{e^4} + \frac{1}{4e^2} \\ = \frac{-3}{e^2} + \frac{1}{4e^2} \\ = \frac{-11}{4e^2}$$

$$\begin{aligned}
 P(e^2 < X \leq e^3) &= F_X(e^3) - F_X(e^2) \\
 &= \frac{e^2 - 2e^2 \ln(e^4)}{e^6} + \frac{1}{4e^2} - \frac{e^2 - 2e^2 \ln(e^4)}{e^4} - \frac{1}{4e^2} \\
 &= \frac{e^2 - 12e^2}{e^6} - \frac{e^2 - 4e^2}{e^4} \\
 &= \frac{1 - 12}{e^4} - \frac{1 - 4}{e^2} \\
 &= \frac{-11}{e^4} + \frac{3}{e^2} \\
 &= \frac{-11 + 3e^2}{e^4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{X > e^2}(X < e^3) &= \frac{P(X > e^2 \cap X < e^3)}{P(X > e^2)} \\
 &= \frac{P(e^2 < X < e^3)}{1 - P(X \leq e^2)} \\
 &= \frac{\frac{3e^2 - 11}{e^4}}{1 + \frac{11}{4e^2}} \\
 &= \frac{3e^2 - 11}{e^4} \times \frac{4e^2}{4e^2 + 11} \\
 &= \frac{4(e^2 - 11)}{e^2(4e^2 + 11)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8) a. \forall x > e, G'(x) &= - \frac{\ln(x) \cdot x - \ln(x) \cdot x'}{x^2} \\
 &= - \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x)}{x^2} \\
 &= - \frac{1 - \ln(x)}{x^2}
 \end{aligned}$$

b. X admet une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty} r f(r) dr$ converge.

$\forall r < e$, $r f(r) = 0$ donc $\int_e^e r f(r) dr$ converge et vaut 0.

$$\forall x > e, \int_e^x r f(r) dr = \int_e^x 4e^2 \frac{\ln(r)-1}{r^2} dr$$

$$= 4e^2 \int_e^x \frac{\ln(r)-1}{r^2} dr$$

avec $u = \ln(r)-1 \quad u' = \frac{1}{r}$
 $v = -\frac{1}{r} \quad v' = \frac{1}{r^2}$

$$= 4e^2 \left(\left[-\frac{\ln(r)-1}{r} \right]_e^x - \int_e^x -\frac{1}{r^2} dr \right)$$

$$= 4e^2 \left(-\frac{\ln(x)-1}{x} + 0 - \left[\frac{1}{r} \right]_e^x \right)$$

$$= 4e^2 \left(-\frac{\ln(x)-1}{x} - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e} \right) \right)$$

$$= -4e^2 \frac{\ln(x)-1}{x} - \frac{4e^2}{x} + 4e$$

Soit $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)-1}{x} = 0$ par croissance comparée.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^2}{x} = 0$$

On a donc $\int_e^{+\infty} r f(r) dr$ qui converge et vaut $0 + 0 + 4e = 4e$

Par relation de Charles, $\int_{-\infty}^{+\infty} r f(r) dr$ converge et vaut $0 + 4e = 4e$

Donc X admet bien une espérance et $E(X) = 4e$

a) u. Soit $r > e^2$

$\Rightarrow$

Numéro d'inscription

0 3 2 5 2



Né(e) le

0 8 / 0 7 / 2 0 0 6

Signature

Nom

Z A P O L S K I

Prénom (s)

M A U R E E N



Épreuve :

Maths

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement
renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0 5 / 0 7

Numéro de table

2 9

$$10) a. \forall x \in \mathbb{R}, F_m(x) = P(Z_m \leq x)$$

$$= P(X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x) \cap \dots \cap (X_m \leq x)$$

$$= P(X_1 \leq x) \times P(X_2 \leq x) \times \dots \times P(X_m \leq x)$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{m \text{ fois}}$

$$= (F(x))^m$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

Partie 3:

11) a. Soit $h_n(x) = (1 - e^{-x})^n$

$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{1-x} = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x e^{1-x})^n = 1$$

$$b. \forall x \geq 1, h'_n(x) = n(1 - x e^{1-x})^{n-1} \times g'(x)$$

On $\forall x \geq 1, g'(x) \geq 0$ (d'après la partie 1)

$$\text{et } \forall x \geq 1, 1 - x e^{1-x} \geq 0$$

Comme $n \geq 0$, on a $h'_n(x) \geq 0$

Donc h_n est croissante sur $[1; +\infty[$

c.

Exercice 3:

Partie 1:

1) a. R compte le nombre de succès "bouillards avec des roses" lors des m expériences de Bernoulli identiques et indépendantes "tirer un bouillard".

La probabilité de succès est $p = \frac{3}{10}$

Donc R suit une loi binomiale ($R \sim B(m; \frac{3}{10})$)

$$R(\Omega) = \{0, m\} \quad \text{et} \quad \forall k \in R(\Omega), \quad P(R=k) = \binom{m}{k} \left(\frac{3}{10}\right)^k \left(\frac{7}{10}\right)^{m-k}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } E(R) &= \frac{3}{10} m \quad \text{et} \quad V(R) = \frac{3}{10} m \left(\frac{7}{10}\right) \\ &= \frac{21}{100} m \end{aligned}$$

$$2) \text{ a. Soit } [S=0] = [R=0] \cap [C=0]$$

$$\text{On a } P(S=0) = P(R=0 \cap C=0)$$

$$= P(R=0) \times P(C=0) \quad \text{par indépendance des tirages}$$

$$= \binom{m}{0} \left(\frac{3}{10}\right)^0 \left(\frac{7}{10}\right)^{m-0} \times P(C=0)$$

$$\text{On a } P(C=0) = \binom{m}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^m \quad \text{car } C \text{ suit une loi binomiale.}$$

$$\text{D'où } P(S=0) = \binom{m}{0} \left(\frac{3}{10}\right)^0 \left(\frac{7}{10}\right)^m \times \binom{m}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

$$= \left(\frac{7}{10}\right)^m \times \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

$$= \left(\frac{7}{20}\right)^m$$

$$\text{Soit } [S=1] = [R=1 \cap C=0] \cup [R=0 \cap C=1]$$

$$\text{On a } P(S=1) = P(R=1) \times P(C=0) + P(R=0) \times P(C=1) \quad \text{par incompatibilité et indépendance}$$

$$= \binom{m}{1} \left(\frac{3}{10}\right)^1 \left(\frac{7}{10}\right)^{m-1} \times \binom{m}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^m + \binom{m}{0} \left(\frac{3}{10}\right)^0 \left(\frac{7}{10}\right)^m \times \binom{m}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$$

$$= m \times \frac{3}{10} \times \left(\frac{7}{10}\right)^{m-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^m + \left(\frac{7}{10}\right)^m \times m \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$$

$$= \frac{10}{7} m \left(\frac{7}{20}\right)^m$$

3) a. D'après la formule du théorème de Huygens, $\text{Cov}(R, C) = E(R, C) - E(R)E(C)$

$$\text{Soit } E(R) = \frac{3}{10} \text{ m et } E(C) = \frac{1}{2} \text{ m}$$

$$\text{On a } E(R, C) = \sum_{x, y \in R(\Omega) \times C(\Omega)} xy P(R=x) P(C=y)$$

$$= \sum_{x, y \in R(\Omega) \times C(\Omega)} xy \binom{n}{x} \left(\frac{3}{10}\right)^x \left(\frac{7}{10}\right)^{n-x} \binom{n}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^y \left(\frac{1}{2}\right)^{n-y}$$

3) b Si $\text{Cov}(R, C) \neq 0$, R et C ne sont pas indépendantes
sinon, on ne peut pas conclure.

Numéro d'inscription

03252



Né(e) le

08 / 07 / 2006

Signature

Nom

ZAPOLSKI

Prénom(s)

MAUREEN



Épreuve :

Maths

Sujet

☐

1

ou

☐

2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

☐

06

/

☐

07

Numéro de table

☐

28

☐

Partie 2 :

5) a. T renvoie le rang du premier succès "obtenir un foulard sans roses" lors des expériences de Bernoulli identiques et indépendantes "tirer un foulard".

La probabilité de succès est $p = \frac{7}{10}$

Donc T suit une loi géométrique ($T \sim G(\frac{7}{10})$)

On a $T(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in T(\mathbb{Z}), P(T=k) = \frac{7}{10} \left(\frac{3}{10}\right)^{k-1}$

b. $E(T) =$

$$\text{et } V(T) = \frac{p^2-1}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

6) a. $N(R) = (1; m]$

avec m le rang ou on obtient un foulard avec des roses

b. $[N=2] = [\bar{R}_1 \cap R_2]$

c.
$$\begin{aligned} P(N=2) &= P(\bar{R}_1 \cap R_2) \\ &= P(\bar{R}_1) \times P(R_2) \text{ par indépendance car les tirages sont avec remise} \\ &= \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} \\ &= \frac{21}{100} \end{aligned}$$

d. $[N=3] = \bar{R}_1 \cap \bar{R}_2 \cap R_3$

$$\begin{aligned} P(N=3) &= P(\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2 \cap R_3) \\ &= P(\bar{R}_1) \times P(\bar{R}_2) \times P(R_3) \text{ par indépendance} \\ &= \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} \\ &= \frac{63}{1000} \end{aligned}$$

e. Soit
$$\sum_{k \geq 2} P(N=k) = \sum_{k \geq 2} \left(\frac{7}{10} \times \left(\frac{3}{10} \right)^{k-2} + \frac{3}{10} \times \left(\frac{7}{10} \right)^{k-2} \right)$$

$$\text{On } \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{10} \right)^{k-2} = 0 \text{ car } \left| \frac{3}{10} \right| < 1 \text{ et } \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{7}{10} \right)^{k-2} = 0 \text{ car } \left| \frac{7}{10} \right| < 1$$

Donc la série converge et vaut

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{7}{10} \left(\frac{3}{10} \right)^{k-1} + \frac{3}{10} \left(\frac{7}{10} \right)^{k-1} \right) &= \frac{7}{10} \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{3}{10} \right)^{k-1} + \frac{3}{10} \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{7}{10} \right)^{k-1} \\
 &= \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{1}{1 - \frac{3}{10}} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{1}{1 - \frac{7}{10}} \\
 &= \frac{3}{10} + \frac{7}{10} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

On obtient $\sum_{k=2}^{+\infty} P(N=k) = 1$

7) a $\forall n \geq 1$, posons $P(n): (1-q)^2 S_n = 1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}$

Initialisation:

$$P(1): (1-q)^2 S_1 = 1 - 2q + q^2$$

$$\Leftrightarrow (1-q)^2 = 1 - 2q + q^2 \quad \text{car } S_1 = 1$$

On $(1-q)^2 = 1 - 2q + q^2$ (identité remarquable)

Donc $P(1)$ est vrai

Hérédité: Supposons que pour un entier fixé $n \geq 1$, $P(n)$ soit vrai et montrons que $P(n+1)$ l'est aussi.

$$P(n+1): (1-q)^2 S_{n+1} = 1 - (n+2)q^{n+1} + (n+1)q^{n+2}$$

$$\text{Soit } (1-q)^2 S_{n+1} = (1-q)^2 \sum_{k=1}^{n+1} k q^{k-1}$$

$$= (1-q)^2 \left(\sum_{k=1}^n k q^{k-1} + (n+1) q^n \right)$$

$$= (1-q)^2 (S_n + (n+1) q^n)$$

$$= (1-q)^2 S_n + (1-q)^2 (n+1) q^n$$

$$= 1 - (n+1) q^n + n q^{n+1} + (1-q)^2 (n+1) q^n \text{ d'après } P(n)$$

$$= 1 - (n+1) q^n + n q^{n+1} + (1-2q+q^2)(n+1) q^n$$

$$= 1 - (n+1) q^n + n q^{n+1} + (n q^n + q^n - 2 q n q^n - 2 q q^n + n q^{n+2} + q^{n+2})$$

$$= 1 - n q^n - q^n + n q^{n+1} + n q^n + q^n - 2 n q^{n+1} - 2 q^{n+1} + n q^{n+2} + q^{n+2}$$

$$= 1 + n q^{n+1} - 2 n q^{n+1} - 2 q^{n+1} + (n+1) q^{n+2}$$

$$= 1 - q^{n+1} (n+2) + (n+1) q^{n+2}$$

Donc $P(n+1)$ est vrai.

Par récurrence, $P(n)$ est vrai $\forall n \geq 1$.

b. Soit $\lim_{k \rightarrow +\infty} kq^{k-1} = 0$ on a donc $\sum$

Numéro d'inscription

03252



Né(e) le

08 / 07 / 2006

Signature

Nom

ZAPOLSKI

Prénom(s)

MAUREEN



Épreuve :

Maths - ECT

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

07

/ 07

Numéro de table

29

9) a. $P(T=2 \cap N=2) = P(T=1) \times P(N=2)$ par indépendance des tirages

$$= \frac{7}{10} \times \left(\frac{7}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{10} \right)$$

$$= \frac{7}{10} \left(\frac{21}{100} + \frac{21}{100} \right)$$

$$= \frac{7}{10} \times \frac{42}{100}$$

$$= \frac{7}{10} \times \frac{21}{50}$$

$$= \frac{147}{500}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

Partie 3:

10)

11) On peut choisir l'attribut "ref" comme clé primaire car la référence sera unique par rapport au type de foulard

12) UPDATE prix = '72' FROM foulards WHERE ref = '26 ECR';

13) La requête renverra tous les foulards dont il y a plus de 20 unités ou exactement 20 unités et où le délai de livraison est strictement inférieur à 35 jours.

10. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

• • •

•

•

•

•