Copie anonyme - n°anonymat : 310657

N7-00179
310657
Mat Appli

Code épreuve : 288 | **Nombre de pages :** 31 | **Session :** 2026

Épreuve de : Mathématiques Appliquées I HEC/ESSEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

1. a)
```
def Norme(x):
    n = len(x)
    norme = 0
    for k in range(n):
        norme = norme + X[k]**2
    return(np.sqrt(norme))
```

b) On exécute :
```
X = np.array([1,0,1,1,1])
print(Norm(X)) ; print(Norme((1/Norme(X))*X))
```

On a d'abord $\|X\| = \sqrt{1^2+0^2+1^2+1^2+1^2}$
$= \sqrt{4} = 2$

Puis $\left\| \frac{1}{\|X\|} X \right\|$

Donc $\frac{1}{\|X\|} X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\0\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$

D'où $\left\| \frac{1}{\|X\|} X \right\| = \sqrt{\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$

Donc on obtient 2, 1

2. A = np.array ([[2,1] , [0,1] , [1,0]]) ; x = np.array ([-1,-1])
eps = 0,6
print (Norme (np.dot (A, x))** 2)
print (1-eps <= Norme (np.dot(A,x))** 2 / Norme (x)** 2 <= 1+eps)

On obtient
3.0
True

On a alors $\|Ax\|^2 = 3$ avec le 1er print

Et $1-0,6 \leq \frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2} \leq 1+0,6$ qui est vérifié avec le True

Soit $0,4\|x\|^2 \leq 3 \leq 1,6\|x\|^2$

3. def EstIsom (A, Lx, eps):
    x = 1
    n = len Lx
    for k in range (n):
        if 1-eps <= Norme (np.dot (A, Lx[k]))** 2 / Norme (L[k])
            x = x * 1 **2 <= 1 + eps)
        else :
            x = x * 0
    if x = 1 :
        return (True)
    else :
        return (False)

On exécute Lx = [np.array ([-1,3]), np.array ([1,-2]),
print (EstIsom (np.array ([2,1] [0,1], [1,0]), Lx, 0.2))

On a donc $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $Lt = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$:

Avec eps = 0,2

Donc $A\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

D'où $\|Ax\|^2 = \left(\sqrt{1+9+1}\right)^2 = |11| = 11$

et $\|x\|^2 = \left(\sqrt{4}\right)^2 = |4| = 4$

On a bien $4 \times 0,8 \leq 11$ mais $4 \times 1,2 \leq 11$

Donc on obtient false

4. def M(m, n) :
return rd.normal(0, 1, [m, n])

5. on a $Y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j G_{i,j}$ $Z = \|Mx\|^2$

Et $i \in [\![1, m]\!]$

a) Soit $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_j \neq 0$

On a $G_{i,j} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

Donc $E(x_j G_{i,j}) = x_j E(G_{i,j}) = x_j \times 0 = 0$

Et $V(x_j G_{i,j}) = x_j^2 V(G_{i,j}) = x_j^2$

D'où $x_j G_{i,j} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, x_j^2)$

b) Donc $E(Y_i) = E\left(\sum_{j=1}^{n} x_j G_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n} E(x_j G_{i,j})$ par linéarité de l'espérance

$= 0$

Et $V(Y_i) = V\left(\sum_{j=1}^{n} x_j G_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n} V(x_j G_{i,j})$ par indépendance des $G_{i,j}$

$$= \sum_{j=1}^{n} (x_j)^2$$

Or, $\|X\| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j)^2} = 1 \Leftrightarrow \left|\sum_{j=1}^{n} (x_j)^2\right| = 1^2 = 1$

Donc $V(Y_i) = 1$

D'où $Y_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

$E(Y_i^2) = E\left(\sum_{j=1}^{n} x_j G_{i,j} \sum_{j=1}^{n} x_j G_{i,j}\right)$

= je pose et j'admets

c) $MX = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} G_{1,1} & \cdots & G_{1,n} \\ \vdots & & \\ G_{m,1} & \cdots & G_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} x_j G_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} x_j G_{m,j} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^{n} x_j G_{1,j} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^{n} x_j G_{m,j} \end{pmatrix}$

D'où $\|MX\| = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j G_{i,j}\right)^2}$

Donc $\|MX\|^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j G_{i,j}\right)^2$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 310657

Emplacement QR Code

Code épreuve : 288 | Nombre de pages : 31 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Appliquées I · HEC / ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc $\|\Pi x\|^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i^2$

Ainsi $Z = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i$

Soit $\varepsilon \in]0,1[$ et $t \in]0, \frac{1}{4}]$.

6. a) $\forall i \in [\![1,m]\!]$, $E(e^{tY_i^2})$ existe par théorème du transfert si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx^2} f_{Y_i}(x)\,dx$ converge absolument

Avec $f_{Y_i}(x)$ densité de Y_i

Or, $Y_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{Y_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

on a de plus $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in]0, \frac{1}{4}]$, $\frac{e^{-(1-2t)\frac{x^2}{2}}}{e^x} = e^{-(1-2t)\frac{x^2}{2} - x}$

Or, $\lim_{x\to+\infty} e^{-(1-2t)\frac{x^2}{2} - x} = 0$ par opération sur les limites

Donc $e^{-(1-2t)\frac{x^2}{2}} = o_{+\infty}(e^x)$

Or $\int_{-\infty}^{+\infty}$

De plus $t \leq \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow -(1-2t) \leq -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow e^{-(1-2t)\frac{x^2}{2}} \leq e^{-\frac{x^2}{4}}$

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4}} dx$ converge par opérations sur une densité de loi normale $\mathcal{N}(0, \sqrt{2})$

Donc par comparaison d'intégrales généralisées à fonctions positives et continue

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1-2t)\frac{x^2}{2}} dx$ converge

Or, $E(e^{tY_i^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx^2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1-2t)\frac{x^2}{2}} dx$

par théorème de transfert

Donc $E(e^{tY_i^2})$ existe et vaut $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1-2t)\frac{x^2}{2}} dx$

b) $\forall i \in [\![1, m]\!]$

Avec $e^{-(1-2t)\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2\times\left(\frac{1}{\sqrt{1-2t}}\right)^2}}$

On a donc presque une densité de $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\sqrt{1-2t}}\right)$

Avec $\frac{1}{\sqrt{1-2t}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \frac{1}{\sqrt{1-2t}}} e^{-(1-2t)\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1-2t)\frac{x^2}{2}}$

On reconnait une densité de $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\sqrt{1-2t}}\right)$

Donc $E(e^{tY_i^2}) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\times\frac{1}{\sqrt{1-2t}}} \times e^{-\frac{x^2}{2\times\left(\frac{1}{\sqrt{1-2t}}\right)^2}} dx}_{= 1 \text{ car densité de } \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\sqrt{1-2t}}\right) \text{ sur son support}}$

$$\text{D'où } E(e^{tY_i^2}) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}}$$

a) On a

$$E(e^{tm_7}) = E\left(e^{t\sum_{i=1}^{m} Y_i^2}\right) = E\left(e^{tY_1^2 + \dots + tY_m^2}\right)$$

$$= E\left(e^{tY_1^2} \times \dots \times e^{tY_m^2}\right)$$

Or par lemme des coalitions les $(Y_i)_{i\geq 1}$ sont indépendantes et donc les e^{tX_i} le sont aussi

Or on a montré précédemment que les $(e^{tY_i})_{i\geq 1}$ admettent une espérance

Donc $E(e^{tm_7}) = E(e^{tY_1^2}) \times \dots \times E(e^{tY_m^2})$ qui existe

$$\text{Donc } E(e^{tm_7}) \text{ existe}$$

De plus, $P(Z \geq 1+\varepsilon) = P(tm_7 \geq tm(1+\varepsilon))$

$= P(e^{tm_7} \geq e^{tm(1+\varepsilon)})$

par stricte croissance de $t \mapsto e^t$

Donc par inégalité de Markov

$$P(e^{tm_7} \geq e^{tm(1+\varepsilon)}) \leq \frac{E(e^{tm_7})}{e^{tm(1+\varepsilon)}}$$

$$\Leftrightarrow P(Z \geq 1+\varepsilon) \leq E(e^{tm_7}) e^{-tm(1+\varepsilon)}$$

De plus, $[Z > 1+\varepsilon] \subset [Z \geq 1+\varepsilon]$

Donc par croissance des probabilités

$$P([Z > 1+\varepsilon]) \leq P([Z \geq 1+\varepsilon])$$

Finalement $P(Z > (1+\varepsilon)) \leq P(Z \geq (1+\varepsilon)) \leq E(e^{tmZ}) e^{-tm(1+\varepsilon)}$

b) Comme énoncé à la question précédente

$$E(e^{tmZ}) = E(e^{tY_1^2}) \times \cdots \times E(e^{tY_m^2})$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{1-2t}}\right)^m \quad \text{car } \forall i \in [\![1, m]\!],\ E(e^{tY_i^2}) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}}$$

Donc $E(e^{tmZ}) e^{-tm(1+\varepsilon)} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-2t}}\right)^m (e^t)^m e^{-tm\varepsilon}$

$$= \left(\frac{e^t}{\sqrt{1-2t}}\right)^m e^{-tm\varepsilon}$$

Ainsi, $P(Z > (1+\varepsilon)) \leq \left(\frac{e^t}{\sqrt{1-2t}}\right)^m e^{-tm\varepsilon}$

(d'après 7.a)

c) On pose $g(t) = -t - \frac{1}{2}\ln(1-2t) - 2t^2$ avec $1-2t > 0$

g dérivable par somme et composée

$$g'(t) = -1 - \frac{1}{2} \times \frac{-2}{1-2t} - 4t = \frac{1}{1-2t} - 1 - 4t$$

$$= \frac{-2t + 8t^2}{1-2t} = \frac{t(8t-2)}{1-2t}$$

Donc $g'(t) \leq 0 \iff 8t \leq 2 \iff t \leq \frac{1}{4}$ ce qui est toujours vrai

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 310657

Emplacement QR Code

Code épreuve : 288 | Nombre de pages : 31 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Appliquées I HEC/ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc g strictement décroissante

$\forall t \in]0, \frac{1}{4}], \; g'(t) \leq \lim_{t \to 0^+} g(t) = 0$

Donc $\forall t \in]0, \frac{1}{4}], \; -t - \frac{1}{2}\ln(1-2t) \leq 2t^2$

On admet $P(Z \geq (1+\varepsilon)) \leq e^{n(2t^2 - t\varepsilon)}$

d) On a par l'inégalité en 7. c)

~~$-t - \frac{1}{2}\ln(1-2t) \leq 2t^2$~~

~~On a $-t\varepsilon - \varepsilon$~~

Je passe

8. On a

$P([Z \leq (1-\varepsilon)] \cup [Z \geq (1+\varepsilon)]) = P(Z \leq (1-\varepsilon)) + P(Z \geq (1+\varepsilon)) - P([Z \leq 1-\varepsilon] \cap [Z \geq 1+\varepsilon])$

Or $[Z \leq 1-\varepsilon] \cap [Z \geq 1+\varepsilon] = \emptyset$

Donc $P([Z \leq 1-\varepsilon] \cup [Z \geq 1+\varepsilon]) = P(Z \leq 1-\varepsilon) + P(Z \geq 1+\varepsilon)$

Or $P(Z < (1-\varepsilon)) \leq e^{-m\frac{\varepsilon^2}{2}}$ et $P(Z > (1+\varepsilon)) \leq e^{-m\frac{\varepsilon^2}{8}}$

Donc $P([Z < 1-\varepsilon] \cup [Z > 1+\varepsilon]) \leq 2e^{-m\frac{\varepsilon^2}{8}}$

$\forall i \in [\![1, r]\!]$, $B_i = [(1-\varepsilon)\|X_i\|^2 \leq \|MX_i\|^2 \leq (1+\varepsilon)\|X_i\|^2]$

9.

a) $\forall i \in [\![1, r]\!]$ tel que $X_i \neq 0$, $U_i = \frac{1}{\|X_i\|} X_i$

On pose $X_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

$$\|X_i\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2}$$

Donc $$\frac{1}{\|X_i\|} X_i = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2}} \\ \vdots \\ \frac{x_m}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2}} \end{pmatrix}$$

Donc $$\left\| \frac{1}{\|X_i\|} X_i \right\| = \sqrt{\frac{x_1^2}{\sum_{k=1}^{m} x_k^2} + \dots + \frac{x_m^2}{\sum_{k=1}^{m} x_k^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{m} \lambda_k^2}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2}} = \sqrt{1} = 1$$

Donc $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\|U_i\| = 1$

De plus, $MU_i = \frac{1}{\|X_i\|} MX_i$

D'où $\|MU_i\| = \left|\frac{1}{\|X_i\|}\right| \|MX_i\|$ avec hypothèse de l'énoncé et $\frac{1}{\|X_i\|}$ constante

Donc $\|MU_i\|^2 = \frac{1}{\|X_i\|^2} \|MX_i\|^2$

Or $B_i = \left[(1-\varepsilon)\|X_i\|^2 \leq \|MX_i\|^2 \leq (1+\varepsilon)\|X_i\|^2\right]$

$= \left[(1-\varepsilon) \leq \frac{1}{\|X_i\|^2} \|MX_i\|^2 \leq 1+\varepsilon\right]$ avec $\|X_i\|^2 \neq 0$

$= \left[(1-\varepsilon) \leq \|MU_i\|^2 \leq 1+\varepsilon\right]$ d'après ce qui précède

b) On admet $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ avec $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ famille d'événements

"Π est une (ε, α)-isométrie" : $\bigcap_{i=1}^{n} B_i$

Donc "Π n'est pas une (ε, α)-isométrie" est $\overline{B_i}$ de la forme :

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} \left[(1-\varepsilon) \leq \|MU_i\|^2 \leq (1+\varepsilon)\right]} = \bigcup_{i=1}^{n} \left[\|MU_i\|^2 < 1-\varepsilon\right] \cup \left[\|MU_i\|^2 > 1+\varepsilon\right]$$

Donc $P(\text{"}\Pi \text{ n'est pas une } (\varepsilon,\pi)\text{-isométrie"}) = P\left(\bigcup_{i=1}^{r}\left[\|\Pi U_i\|^2 < 1-\varepsilon\right] \cup \left[\|\Pi U_i\|^2 > 1+\varepsilon\right]\right)$

D'après l'inégalité admise

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{r}\left[\|\Pi U_i\|^2 < 1-\varepsilon\right] \cup \left[\|\Pi U_i\|^2 > 1+\varepsilon\right]\right) \leq \sum_{i=1}^{m} P\left(\left[\|\Pi U_i\|^2 < 1-\varepsilon\right] \cup \left[\|\Pi U_i\|^2 > 1+\varepsilon\right]\right)$$

Or en reprenant la question 8 avec $Z = \|\Pi U_i\|^2$

On a $P\left(\left[\|\Pi U_i\|^2 < 1-\varepsilon\right] \cup \left[\|\Pi U_i\|^2 > 1+\varepsilon\right]\right) \leq 2e^{m\frac{\varepsilon^2}{8}}$

D'où $\sum_{i=1}^{r} P\left(\left[\|\Pi U_i\|^2 < 1-\varepsilon\right] \cup \left[\|\Pi U_i\|^2 > 1+\varepsilon\right]\right) \leq 2re^{-m\frac{\varepsilon^2}{8}}$

Par sommation terme à terme

D'où $P(\text{"}\Pi \text{ n'est pas une } (\varepsilon,\pi)\text{-isométrie"}) \leq 2re^{-m\frac{\varepsilon^2}{8}}$

c) On suppose $m > \dfrac{8\ln(2r)}{\varepsilon^2}$

Le passe

10. Lt représente π

def Isom (Lt, m, eps):

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 310657

Emplacement QR Code

Code épreuve : 288 | **Nombre de pages :** 31 | **Session :** 2026

Épreuve de : Mathématiques Appliquées I HEC/ESSEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

11) On a T_k : l'ensemble des parties de $[\![1, n]\!]$ à k éléments

Donc on veut l'ensemble des parties à k éléments d'un ensemble à n éléments

$$\#T_k = \binom{n}{k}$$

12.

a) C_0 : ensemble des $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $\langle X \rangle \leq 0$

Donc l'ensemble des matrices $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec 0 composantes non nulles

$$\text{D'où } C_0 : \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \right\}$$

C_n : ensemble des $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $\langle X \rangle \leq n$

Donc l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec moins de n composantes non nulles

$$C_n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$

b) $T \in T_k$ tel que $T = \{i_1, \dots, i_k\}$

$\mathcal{Q}(T)$: ensemble des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont le support est inclus dans T

- $\mathcal{Q}(T) \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
- $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{Q}(T)$
- Soit $T, T' \in T_k$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$\mathcal{Q}(T + \lambda T') \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Donc $\mathcal{Q}(T)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

On a T une partie à k éléments de $[\![1, n]\!]$

Donc si $\mathcal{Q}(T)$ est l'ensemble des éléments dont le support est inclus dans T, alors $\mathcal{Q}(T)$ a au maximum k matrices qui forment puisque T est un ensemble à k éléments
· une famille libre

$\mathcal{Q}(T)$ sous espace vectoriel de dimension k

c)
C_k : ensemble des $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $\langle X \rangle \leq k$

Or, $\Omega(T)$ ensemble dont le support est inclus dans T, c'est à dire dont le support est inférieur ou égal à k puisque T a pour cardinal k

Dès lors, C_k englobe tous les tels éléments T de T_k

$$\text{D'où } C_k = \bigcup_{T \in T_k} \Omega(T)$$

C_k n'est pas un sous-espace vectoriel puisque la somme de deux éléments de C_k avec au moins de k éléments non nuls peut avoir plus de k éléments non nuls

Exemple. $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \notin C_k$

13. Soit X et Y deux éléments non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

a) $\forall i \in [\![1, n]\!]$

$(|x_i| - |y_i|)^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x_i|^2 - 2|x_i||y_i| + |y_i|^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow |x_i|^2 + |y_i|^2 \geq 2|x_i||y_i|$

Or, $|x_i|^2 = x_i^2$ et $|y_i|^2 = y_i^2$

D'où $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $2|x_i||y_i| \leq x_i^2 + y_i^2$

b) On suppose $\|X\| = \|Y\| = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} = 1$

$\Leftrightarrow \left|\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right| = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = 1$

On a donc $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1 = \sum_{k=1}^{n} y_k^2$

Or, $2|x_i||y_i| \leq x_i^2 + y_i^2$

$\Rightarrow 2\sum_{i=1}^{n} |y_i||x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 2$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |y_i||x_i| \leq 1$

Or par inégalité triangulaire

$$\left|\sum_{i=1}^{n} y_i x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \leq 1$$

D'où $\|X\| = \|Y\| = 1 \Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq 1$

c) Plus généralement

$2\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + y_i^2$

On admet $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \|X\| \|Y\|$

D'où $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$

↳ par stricte croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 310657

Emplacement QR Code

Code épreuve : 288 | Nombre de pages : 31 | Session : 2026

Épreuve de : Maths Appliquées I HECETSTC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

~~Si X ou Y nul alors $\|X\| = 0$ ou $\|Y\| = 0$~~

Si X ou Y est nul

Alors soit → $\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = 0$
Soit → $\forall i \in [\![1, n]\!],\ y_i = 0$

Donc dans tous les cas

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 0$$

L'inégalité reste donc vraie pour X ou Y nul

$A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

14. a) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$AX = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \\ a_{m,1} & & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{m,j} x_j \end{pmatrix}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc $\|Ax\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right)^2}$

D'où $\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right)^2$

b)
On a $\|x\|^2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz démontrée précédemment

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right)^2 \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 \sum_{j=1}^{n} x_j^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 \sum_{j=1}^{n} x_j^2$$

$$\Leftrightarrow \|Ax\|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 \right) \|X\|^2$$

On pose $\alpha = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2}$

c) . D'après les hypothèses et $\forall (x, y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$

$\|Ax\| - \|Ay\| \leq \|Ax - Ay\| = \|A(x-y)\|$ car $\|-Ay\| = \|Ay\|$

Donc $\|Ax\| \leq \|Ay\| + \|A(x-y)\|$

Et $\|Ax\| - \|Ay\| \leq \|Ax - Ay\| \Leftrightarrow -\|Ax - Ay\| \leq \|Ay\| - \|Ax\|$

$\Leftrightarrow$ $\|Ay\| - \|Ax\| \leq \|Ax - Ay\|$ ~~$\leq \|Ay - Ax\|$~~

$\Leftrightarrow$

J'admet le membre de gauche

$$\|Ay\| - \|A(x-y)\| \leq \|Ax\| \leq \|Ay\| + \|A(x+y)\|$$

On a $\# \mathcal{X}_{\tau,\delta} \leq \left(\frac{12}{\delta}\right)^2$

$\forall x \in \mathcal{Q}(t)$ avec $\|x\| = 1$, il existe $y \in \mathcal{X}_{\tau,\delta}$ tq $\|y\| = 1$

et $\|x - y\| \leq \frac{\delta}{4}$

16. Soit $\delta \in]0,1[$

$$\begin{cases} v_0 = \alpha - 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{\delta}{4}(3 + v_n) \end{cases}$$

On a $v_{n+1} - v_n = \frac{\delta 3}{4} + \frac{\delta}{4} v_n - v_n$

$= v_n\left(\frac{\delta}{4} - 1\right) + \frac{\delta}{4} 3$

On montre que (v_n) converge

$\mathcal{P}(n)$: "$v_{n+1} \leq v_n$"

Initialisation : $n = 0$

$v_0 = \alpha - 1$ or, $v_0 \leq 1$ donc $\frac{3 + v_0}{4} \leq v_0$ $\Leftrightarrow$ $\frac{\delta}{4}(3 + v_0) \leq v_0$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $\mathcal{P}_n$ vraie

d'après l'hypothèse de récurrence, $U_{n+1} \leq U_n$

$\Leftrightarrow \frac{\delta}{4}(3+U_{n+1}) \leq \frac{\delta}{4}(3+U_n)$

$\Leftrightarrow U_{n+2} \leq U_{n+1}$

$\mathcal{P}_{n+1}$ vraie

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} \leq U_n$

Donc (U_n) décroissante minorée

D'après théorème de la limite monotone, U_n on admet converge vers ℓ

Or, (U_n) définie par récurrence et convergente vers ℓ donc d'après le théorème du point fixe

$f(\ell) = \ell$ avec $f : x \mapsto \frac{\delta}{4}(3+x)$

$\Leftrightarrow \ell\left(1 - \frac{1}{4}\delta\right) = \frac{3\delta}{4}$

$\Leftrightarrow \ell = \frac{3\delta}{4-\delta}$

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \frac{3\delta}{4-\delta}$

De plus, $\frac{3\delta}{4-\delta} \leq \delta \Leftrightarrow 3\delta \leq \delta(4-\delta)$ avec $(4-\delta) > 0$

$\Leftrightarrow 3\delta \leq 4\delta - \delta^2 \leq 4\delta$ car $\delta^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow 3\delta \leq 4\delta$ ce qui est toujours vrai car $\delta \in]0,1[$

Donc $\frac{3\delta}{4-\delta} \leq \delta$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 310657

Emplacement QR Code

Code épreuve : 288 | Nombre de pages : 21 | Session : 2026

Épreuve de : Maths appli I HEC/ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Soit $k \in [\![0, n]\!]$, $T \in T_k$, $\varepsilon \in]0,1[$, $\delta \in]0,1[$

Tq $\varepsilon = 2\delta + \delta^2$

17. On suppose A est une $\left(\frac{\delta}{2}, \chi_{T,\delta}\right)$-isométrie

a) Donc on a $\forall Y \in \chi_{T,\delta}$

$$(1-\varepsilon)\|Y\|^2 \leq \|AY\|^2 \leq (1+\varepsilon)\|Y\|^2$$

$$\Leftrightarrow (1-2\delta+\delta^2) \leq \|AY\|^2 \leq (1+2\delta+\delta^2) \quad \text{car } \|Y\|^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (1-\delta(2+\delta)) \leq \|AY\|^2 \leq (1+\delta(2+\delta))$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{\delta}{2}\right)\|Y\|^2 \leq \|AY\|^2 \leq (1+\varepsilon)\|Y\|^2$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{\delta}{2}\right) \leq \|AY\|^2 \leq \left(1+\frac{\delta}{2}\right) \quad \text{car } \|Y\|^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-\frac{\delta}{2}} \leq \|AY\| \leq \sqrt{1+\frac{\delta}{2}}$$

par stricte croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}^{+*}$ (car $1-\frac{\delta}{2} > 0$)

De plus, $\forall x \leq 1$, $x \leq \sqrt{x}$

Or $1-\frac{\delta}{2} \leq 1$

Donc $1-\frac{\delta}{2} \leq \sqrt{1-\frac{\delta}{2}}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

De plus, $\forall n \geq 1$, $\sqrt{n} \leq x$

Or $1 + \frac{\delta}{2} \geq 1$ donc $\sqrt{1+\frac{\delta}{2}} \leq 1 + \frac{\delta}{2}$

Ainsi, $1 - \frac{\delta}{2} \leq \sqrt{1-\frac{\delta}{2}} \leq \|AY\| \leq \sqrt{1+\frac{\delta}{2}} \leq 1 + \frac{\delta}{2}$

b) Pour $X \in S(I)$ avec $\|X\| = 1$ et $Y \in \mathcal{X}_{I,\delta}$ avec $\|Y\| = 1$ et $\|X - Y\| \leq \frac{\delta}{4}$

Je passe

c) On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq \lim_{n \to +\infty} U_n$ car U_n supposée croissante

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq \frac{3\delta}{4-\delta} \leq \delta$ par question 16.

D'après la 17. b

$$1 - U_n \leq \|AX\| \leq 1 + U_n$$

Ce qui équivaut donc à

$$1 - \delta \leq \|AX\| \leq 1 + \delta$$

On a $\varepsilon = 2\delta + \delta^2$ et $\delta \leq 2\delta + \delta^2$ car $\delta \geq 0$

Donc $\delta \leq 2\delta + \delta^2 \iff \delta \leq \varepsilon \iff 1 + \varepsilon \geq 1 + \delta$

Je passe

d) On a donc $\forall x \in 2(T)$ avec $\|x\|$

$$\sqrt{1-\varepsilon} \leq \|Ax\| \leq \sqrt{1+\varepsilon}$$

$\Leftrightarrow (1-\varepsilon) \leq \|Ax\|^2 \leq (1+\varepsilon)$ par stricte croissance de la fonction carrée

$\Leftrightarrow (1-\varepsilon)\|x\|^2 \leq \|Ax\|^2 \leq (1+\varepsilon)\|x\|^2$ car $\|x\|^2 = 1$

On reconnait alors la formule pour laquelle :

A est une $(\varepsilon, 2(T))$-isométrie

18. On suppose $R \in [\![1, n]\!]$

En reprenant le même principe qu'à la question 9. b On a donc

$$P(\text{"}\Pi \text{ n'est pas une } (\varepsilon, 2(T)) \text{-isométrie"}) \leq 2 \# \mathcal{X}_{T,\delta} e^{-m\frac{\varepsilon^2}{8}}$$

Car, Π n'est pas une ε-isométrie a la même probabilité que Π ne soit pas une $(\frac{\delta}{2}, \mathcal{X}_{T,\delta})$-isométrie comme on vient de le montrer durant cette question 17

De plus, $\# \mathcal{X}_{T,\delta} \leq \left(\frac{12}{\delta}\right)^R$ et pour $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ donc car on prend Π qui n'est pas une $(\frac{\delta}{2}, \mathcal{X}_{T,\delta})$-isométrie

D'où $P(\text{"}\Pi \text{ n'est pas une } (\varepsilon, 2(T)) \text{-isométrie"})$

$= P(\text{"}\Pi \text{ n'est pas une } (\frac{\delta}{2}, \mathcal{X}_{T,\delta}) \text{-isométrie"}) \leq 2\left(\frac{12}{\delta}\right)^R e^{-m\frac{\delta^2}{32}}$

Ainsi, $\mathbb{P}(\text{"Il n'est pas une } (\varepsilon, \mathcal{Q}(r))\text{-isométrie"}) \leq 2\left(\frac{12}{\delta}\right)^q e^{-m\frac{\delta^3}{32}}$

On fait de même pour la (ε, C_q)-isométrie je présume

19. a) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$

Or, $\forall k \geq 1$, $n-k \leq n$

D'où $n(n-1)\cdots(n-k+1) \leq n \times n \cdots \times n = n^k$

Ainsi $\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$

b) $e^k = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{k^i}{i!}$

Or, $k \in [\![0, +\infty[\![$

Donc $e^k = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{+\infty} \frac{k^i}{i!} + \frac{k^k}{k!}$

Donc $e^k \geq \frac{k^k}{k!} + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k \\ i \neq k+1}} \frac{k^i}{i!} + \frac{k^{k-1}}{(k-1)!}$

Avec $\frac{k^{k-1}}{(k-1)!} \geq \frac{k^k}{k!}$ (se montre rapidement)

D'où $e^k \geq 2\frac{k^k}{k!}$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 310657

Emplacement QR Code

Code épreuve : 288 | Nombre de pages : 31 | Session : ECG

Épreuve de : Maths appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

On a donc $e^n \geq 2\frac{n^n}{n!}$

Donc $2\frac{n^n}{n!} \leq e^n \iff 2\frac{n^n}{n!} \times \frac{n^n}{n^n} \leq \frac{e^n n^n}{n^n n^n}$

$\iff 2\frac{n^n}{n!} \leq \left(\frac{en}{n}\right)^n$

$\iff 2\binom{n}{n} \leq 2\frac{n^n}{n!} \leq \left(\frac{en}{n}\right)^n$ d'après 19.a)

Donc $2\binom{n}{n} \leq \left(\frac{en}{n}\right)^n$

c) Je passe

20.

a) Soit $(x,y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$

$|X+Y| = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|$

D'après l'inégalité triangulaire

$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad |x_i+y_i| \leq |x_i| + |y_i|$

(2) $\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|$ par sommation terme à terme

$\Leftarrow$ $|x+y| \leq |x| + |y|$

On généralise par récurrence sur $\mathbb{N}^*$

Initialisation : $n = 1$

$|x_1| = |x_1|$ OK

Hérédité : Soit $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_r$ vraie

$$\left|\sum_{i=1}^{r} x_i\right| \quad \sum_{i=1}^{r} |x_i| \quad \text{par hypothèse de récurrence}$$

$$\Leftarrow \left|\sum_{i=1}^{r} x_i\right| + |x_{r+1}| \leq \sum_{i=1}^{r} |x_i| + |x_{r+1}|$$

$$\Leftarrow \left|\sum_{i=1}^{r} x_i + x_{r+1}\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{r} x_i\right| + |x_{r+1}| \leq \sum_{i=1}^{r+1} |x_i|$$

d'après 20.a)

$$\Leftarrow \left|\sum_{i=1}^{r+1} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{r+1} |x_i| \qquad \mathcal{P}_{r+1} \text{ vraie}$$

Conclusion : $\forall x_1, \dots, x_r \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \left|\sum_{i=1}^{r} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{r} |x_i|$

c) On ~~suppose~~ $x \in C_R$

Donc $\langle x \rangle \leq R$

b) $\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \right| = |x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_r|$

On a les $x_1, \dots, x_r$ sont à supports deux à deux disjoints

Je passe

c) D'après la question 13

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)$$

S'admet $\|x\| \leq |x| \leq \sqrt{R}\,\|x\|$

21. $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ une (ε, C_R)-isométrie avec $\varepsilon \in]0,1[$

a) On suppose $AX = 0$

Sachant que A est une (ε, C_R)- isométrie
$\forall x \in C_R$,

$$(1-\varepsilon)\|x\|^2 \leq \|Ax\|^2 \leq (1+\varepsilon)\|x\|^2$$

Donc

Si $\|Ax\| = 0$, $\|Ax\|^2 = 0$

Et $(1-\varepsilon)\|x\|^2 \leq 0$ or, $(1-\varepsilon) > 0$

Donc $\|X\|^2$ est nécessairement nulle

Soit $\|X\|=0$ ce qui implique $X=0$ d'après les hypothèses du début

Donc $\|AX\|=0 \Rightarrow X=0$

b) On a d'après ce résultat ; toutes les matrices $X \in C_R$ n'appartiennent pas à $Ker(A)$ car non toutes nulles

Donc le noyau de A est réduit à $\{0\}$ pour les $X \in C_R$
Avec $rg(C_R) \geq R$

Donc d'après le théorème du rang, $rg(A) \geq R$

2.2) On suppose $R \leq \frac{n}{2}$ $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ une (ε, C_{2R})-isométrie

a) Soit $(X,Y) \in C_R^2$ tels que $AX = AY$

Donc $A(X-Y) = 0$

D'où $X-Y$ a moins de $2R$ composantes non nulles

D'où $X-Y \in C_{2R}$

Si $A(X-Y) = 0$; pour $X \in C_{2R}$

Avec $(1-\varepsilon)\|X\|^2 \leq \|AX\|^2 \leq (1+\varepsilon)\|X\|^2$

et $(1-\varepsilon)\|Y\|^2 \leq \|AY\|^2 \leq (1+\varepsilon)\|Y\|^2$

$\Rightarrow$ Je passe

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 310657

Emplacement QR Code

Code épreuve : 288 | Nombre de pages : 31 | Session : 2028

Épreuve de : Maths Appli HEC ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

b) Soit $Y \in C_k$ et $B = AY$

Je pose

23. On suppose $\langle Z \rangle \leq 3k$

Donc Z a moins de $3k$ composantes non nulles

$Z \in C_{3k}$ or, $k \leq \frac{n}{3} \Leftrightarrow 3k \leq n$

Donc $Z \in C_n \Rightarrow Z = 0$

---

24. a) On suppose $3k+1 \leq \langle Z \rangle$

$\overline{S}$ ensemble des indices des composantes de Y qui sont nulles

D'où $Z_{\overline{S}}$ donne 0 aux composantes dont l'indice n'appartient pas à $\overline{S}$

D'où $Z_{\overline{S}} = 0$

Donc $Y - Z_{\overline{S}} = Y$

En supposant $Y - Z_{\bar{S}} = X + Z_S$

$\Rightarrow$ $Y - X = Z_S$ ce qui est toujours vrai car $Z_S = Z$ puisque en dehors de S les composantes sont déjà nulle

$$Y - Z_{\bar{S}} = X + Z_S$$

Les supports de Y et $Z_{\bar{S}}$ sont deux à deux disjoints donc d'après la question 20. b) :

$$|Y + (-Z_{\bar{S}})| = |Y| + |-Z_{\bar{S}}| = |Y| + |Z_{\bar{S}}|$$

$$\text{Donc } |Y - Z_{\bar{S}}| = |Y| + |Z_{\bar{S}}|$$

b) Donc $|Y - Z_{\bar{S}}| = |X + Z_S| = |Y| + |Z_{\bar{S}}|$

$\Leftrightarrow |X| + |Z_S| = |Y| + |Z_{\bar{S}}|$ $\Leftrightarrow |X| - |Y| = |Z_{\bar{S}}| - |Z_S|$

Or, $|X| \leq |Y|$ $\Leftrightarrow |X| - |Y| \leq 0$

$$\text{Donc } |Z_{\bar{S}}| \leq |Z_S|$$

/

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094