Copie anonyme - n°anonymat : 310657

N7-00179
310657
Mat Appli

Code épreuve : 296 | Nombre de pages : | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées ECML

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1

PARTIE A

$\forall (x,y) \in \mathcal{D}$, $f(x,y) = x + \ln(1+xy)$

1.a) f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ comme somme de fonction coordonnée $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ et composée par ln de fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ (car $1+xy>0$)

On peut donc calculer les dérivées partielles de f

$$\partial_1 f(x,y) = 1 + \frac{y}{1+xy}$$

$$\partial_2 f(x,y) = \frac{x}{1+xy}$$

Donc $\forall (x,y) \in \mathcal{D}$, $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{y}{1+xy} \\ \frac{x}{1+xy} \end{pmatrix}$

b) f admet un point critique si et seulement si

$\nabla f(x,y) = 0_{2,1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{y}{1+xy} = 0 \\ \frac{x}{1+xy} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+xy+y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

(en multipliant par $(1+xy)$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Avec $1 + xy = 1 > 0$

Donc f admet un unique point critique $(0,-1)$ dans $\mathcal{D}$

c) De la même façon que dans la 1.a), f est C^2 et admet donc des dérivées partielles d'ordre 2

$$\partial^2_{1,1} f(x,y) = \frac{-y^2}{(1+xy)^2}$$

$$\partial^2_{2,1} f(x,y) = \frac{1}{(1+xy)^2} = \partial^2_{1,2} f(x,y) \text{ par théorème de Schwarz}$$

$$\partial^2_{2,2} f(x,y) = \frac{-x^2}{(1+xy)^2}$$

Donc $$\nabla^2 f(0,-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $\nabla^2 f(0,-1)$ vérifient : $(\lambda+1)\lambda - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$

On a alors $Sp(\nabla^2 f(0,-1)) = \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

Or, $\frac{\sqrt{5}-1}{2} > 0$ et $\frac{-1-\sqrt{2}}{2} < 0$

Donc f est continue sur D ouvert et admet comme hessienne une matrice avec des valeurs propres de signes contraire

> Donc $(0,-1)$ n'est pas un extremum global

2. a) Soit $h \in \mathbb{R}$ et $(x,y) \in D$ avec $x \neq 0$

On a alors $f(x,y) = h \Leftrightarrow x + \ln(1+xy) = h$

$\Leftrightarrow \ln(1+xy) = h - x$

$\Leftrightarrow 1 + xy = e^{h-x}$ par application de la fonction exp

$\Leftrightarrow xy = e^{h-x} - 1$

$\Leftrightarrow y = \frac{e^{h-x} - 1}{x}$

> Ainsi, $f(x,y) = h \Leftrightarrow y = \frac{e^{h-x} - 1}{x}$

b) for h in K :
    M = [(np.exp(h-x) - 1)/x for x in X]

Le programme représente les lignes de niveau de f pour $h = -\frac{1}{5}$ puis $h = 0$ .... jusqu'à $h = \frac{5}{5} = 1$

PARTIE B

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g(x) = \dfrac{e^{-x} - 1}{x}$

3. On a $\forall x \geq 0,\ e^{-x} \leq 1 \Leftrightarrow e^{-x} - 1 \leq 0$

(1 : par stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}^{*+}$)

> Donc g est positive sur $\mathbb{R}^{-*}$
> g est négative sur $\mathbb{R}^{+*}$

4. On pose $X = -x$

On a donc $\dfrac{e^{-x} - 1}{x} = \dfrac{e^{X} - 1}{-X} = -1 \times \dfrac{e^{X} - 1}{X}$

Or par formule usuelle de croissances comparées, $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{e^{X} - 1}{X} = 1$

Donc $\lim\limits_{X \to 0} -1 \times \dfrac{e^{X} - 1}{X} = -1$

On a alors $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x} - 1}{x} = -1$

> g est prolongeable par continuité en 0 avec $g(0) = -1$

5. e^{-x} admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 tel que

~~$g(x) = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} + o_0(x^2)$~~

$\tau_0 g(x) = \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \dfrac{e^{-x} - 1 + x}{x^2} = \dfrac{1 - x + \frac{x^2}{2} + o_0(x^2) - 1 + x}{x^2}$ par $DL_2(0)$

$= \dfrac{1}{2} + o_0(1)$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \tau_0 g(x) = \dfrac{1}{2}$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 310657

Emplacement QR Code

Code épreuve : 296 | Nombre de pages : | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées ETL

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Ainsi, g dérivable en 0 avec $g'(0) = \frac{1}{2}$

6. a) g est C^1 sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient et composée de fonctions dérivables

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g'(x) = \frac{e^{-x}(-x-1)+1}{x^2}$$

b) On sait que exp est convexe sur $\mathbb{R}$ donc toujours au dessus de ses tangentes notamment celle en 0

$y_0 = x + 1$ ← inégalité stricte car $x \neq 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ e^x > x+1 \Leftrightarrow -e^x < -x-1$

$\Leftrightarrow e^{-x}(-x-1) > -1$

$\Leftrightarrow e^{-x}(-x-1)+1 > 0$

$\Rightarrow \frac{e^{-x}(-x-1)}{x^2} > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g'(x) > 0$

c) On pose $X = -x$

$g(X) = -\frac{e^X - 1}{X} = -\left(\frac{e^X}{X} - \frac{1}{X}\right)$

Or quand x tend vers $+\infty$, $-x$ tend vers $-\infty$ donc X vers $-\infty$ et inversement

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} = +\infty$ par croissances comparées

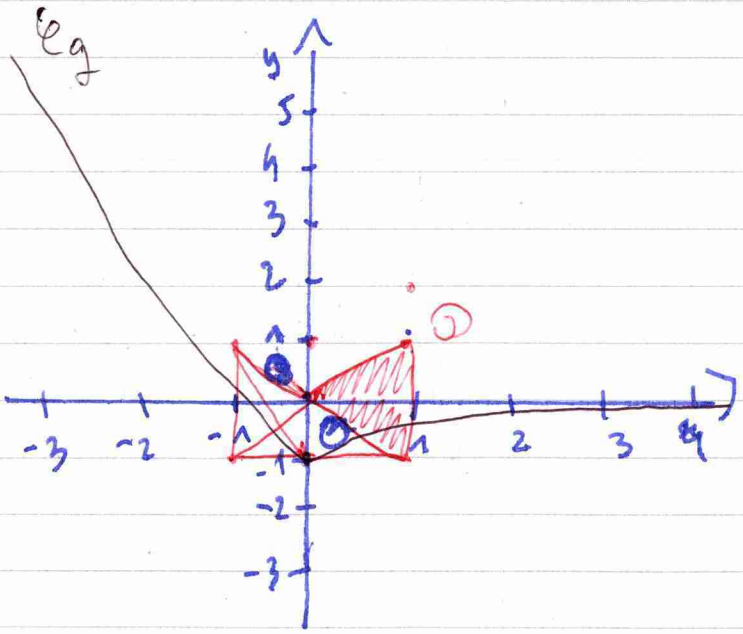
on a $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{X \to -\infty} -\left(\frac{e^X - 1}{X}\right) = 0$

Donc on a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g	$+\infty$	↘	-1 || -1	↗	0

7.

a)



PARTIE C

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$$

8. g est C^2 sur $\mathbb{R}$ car g dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$
Et g est C^1 en

En utilisant un $DL_2(0)$ de e^{-x} sur $g'(x)$ de la question 6.a) on a

$$g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} + o(1)$$

Donc $\lim_{x \to 0} g'(x) = \frac{1}{2} = g'(0)$ donc g' est continue en 0

> D'où g est C^1 sur $\mathbb{R}$ avec
> $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \dfrac{e^{-x}(-x-1)+1}{x^2}$

9. $\forall x > 0,\ G(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt$

$$= \int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt + \int_1^x \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt \quad \text{par Chasles}$$

$$= G(1) + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \quad \text{par linéarité}$$

$$= G(1) + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,dt - [\ln t]_1^x$$

$$= G(1) + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \ln x$$

> Donc $\forall x > 0,\ G(x) = G(1) + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \ln(x)$

On a $\forall t \geq 1$, $\frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$

$\Rightarrow \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_1^n e^{-t} dt$ par croissance des intégrales avec bornes dans le bon ordre

$\Rightarrow$ Or $\lim_{n \to +\infty} \int_1^n e^{-t} dt \leq \lim_{n \to +\infty} \int_0^n e^{-t} dt$

Avec $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$

Donc par encadrement et par positivité de l'intégrale pour tout $t \geq 1$ avec $\frac{e^{-t}}{t} \geq 0 \Rightarrow \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt \geq 0$

On a $0 \leq \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt \leq 1$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{\ln n} \leq \frac{\int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt}{-\ln n} \leq 0$ avec $n \geq 0$

Donc par encadrement, $\lim_{n \to +\infty} \frac{\int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt}{-\ln n} = 0$

Et $\frac{G(n)}{-\ln n} = \frac{G(1)}{-\ln n} + \frac{\int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt}{-\ln n} + 1$

D'où $\lim_{n \to +\infty} \frac{G(n)}{-\ln n} = 1$ car $\lim_{n \to +\infty} \frac{G(1)}{\ln n} = 0$

Donc on a bien $G(n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$

11. Soit $H(n) = \int_n^1 \frac{e^{-t}}{t} dt + \ln n - G(1) - n$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 310657

Emplacement QR Code

Code épreuve : 296 | Nombre de pages : | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées EML

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 2

PARTIE A

1. $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $tr(M) = a+d$

Soit $M' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$

$$tr(M+\lambda M') = tr\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) = tr\left(\begin{pmatrix} a+\lambda a' & b+\lambda b' \\ c+\lambda c' & d+\lambda d' \end{pmatrix}\right)$$

$$= a+\lambda a' + d + \lambda d'$$

$$= a+d+\lambda(a'+d')$$

$$= tr(M) + \lambda tr(M')$$

Donc tr est une application linéaire

2. a) Soient $M' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\varphi(M+\lambda M') = tr(M+\lambda M')I - (M' + \lambda M')$$

$$= tr(M)I + \lambda tr(M')I - M' - \lambda M' \quad \text{car tr linéaire}$$

$$= tr(M)I \cdot M + \lambda\left(tr(M')I - M'\right)$$

$$= \varphi(M) + \lambda \varphi(M')$$

Donc φ est linéaire

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

De plus, $tr(M)I - M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Donc φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

b) $\varphi(I) = tr(I)I - I$
$= 2I - I$
$= I$

Donc $\varphi(I) = I$

c) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$\varphi(M) = (a+d)I - M = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$

D'où $tr(\varphi(M)) = tr\left(\begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}\right) = d + a = tr(M)$

Donc $tr(\varphi(M)) = tr(M)$

3. a) $\varphi(E_1) = tr(E_1)I - E_1$
$= I - E_1$
$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_4$

$\varphi(E_2) = -E_2$

$\varphi(E_3) = -E_3$

$\varphi(E_4) = I - E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_1$

Donc la matrice A de φ dans la base canonique est :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

b)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$$

Donc $A^2 = I_4$ ce qui implique :

$$\boxed{A \text{ inversible et } A^{-1} = A}$$

c) $A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Soit $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

Donc $(A + I_3)X = 0_{4,1} \iff \begin{cases} x + t = 0 \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} -t \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

$$\boxed{\text{Donc } E_{-1}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}$$

De plus, $(A - I_4)X = 0_4 \iff \begin{cases} x - t = 0 \\ y = z = 0 \end{cases}$

Donc $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Donc on a $S_p(A) = \{-1, 1\}$

Et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ base de $E_1(A)$ car vecteur unique non nul

Et on montre aisément que $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de 3 vecteurs en considérant ces vecteurs comme des polynômes échelonnés en degré

$S_p(A) = \{-1, 1\}$
$E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
$E_{-1}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

PARTIE B

4. $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\varphi(M) = \begin{pmatrix} a+d & b \\ c & a+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Je ne sais pas ce qu'est un tableau de nombre

$M\varphi(M) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \det(M)I$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 310657

Emplacement QR Code

Code épreuve : 296 | Nombre de pages : | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc $M\varphi(M) = \det(M) I$

5. a) Si $\det(M) \neq 0$

On a alors $M \frac{\varphi(M)}{\det(M)} = I$ donc $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \varphi(M)$

Si M est inversible

Alors on peut avoir $\varphi(M) = \det(M) M^{-1}$

Mais donc $\det(M)$ doit être $\neq 0$ pour trouver $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \varphi(M)$

Ainsi, M inversible $\Leftrightarrow \det(M) \neq 0$

Et dans ce cas, $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \varphi(M)$

b) On suppose $(M+N)$ inversible avec M et N inversibles

$(M+N)^{-1} = \frac{1}{\det(M+N)} \varphi(M+N)$ d'après ce qui précède

$= \frac{1}{\det(M+N)} \varphi(M) + \frac{1}{\det(M+N)} \varphi(N)$ par linéarité de φ

$= \frac{1}{\det(M+N)} M^{-1} \det(M) + \frac{1}{\det(M+N)} N^{-1} \det(N)$ par l'égalité 5. a)

$= \frac{\det(M)}{\det(M+N)} M^{-1} + \frac{\det(N)}{\det(M+N)} N^{-1}$

$$\text{Donc } (M+N)^{-1} = \frac{\det(M)}{\det(M+N)} M^{-1} + \frac{\det(N)}{\det(M+N)} N^{-1}$$

PARTIE C

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P_0(x) = 0$ et $P_1(x) = 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P_{n+1}(x) = x P_n(x) - P_{n-1}(x)$

6. a)

$P_2(x) = x P_1(x) - P_0(x)$
$= x \times 1 - 0$

$$P_2(x) = x$$

$P_3(x) = x P_2(x) - P_1(x)$
$= x \times x - 1$

$$P_3(x) = x^2 - 1$$

b) On raisonne par récurrence double :

$\mathcal{P}(n)$: « $\deg(P_n) = n-1$ »

Initialisation : $n = 1$

$P_1 = 1$ donc $\deg(P_1) = 1 - 1 = 0$
$P_2(x) = x$ donc $\deg(P_2) = 2 - 1 = 1$

$\mathcal{P}_1$ vraie et $\mathcal{P}_2$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie

$\forall n \in \mathbb{R}$, $P_{n+1}(n) = nP_n(n) - P_{n-1}(n)$

Par hypothèse de récurrence, $\deg(P_{n-1}) = n-2$

$\deg(P_n) = n-1$

Donc $\deg(nP_n(n)) = n$

et $\deg(nP_n(n) - P_{n-1}(n)) = n$

Donc $\deg(P_{n+1}) = n$

$\mathcal{P}_{n+1}$ vraie

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \deg(P_n) = n-1}$$

7. $\Pi \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\det(\Pi) = 1$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = P_n(\mathrm{tr}(\Pi))$

a) A partir de la question 4 :

$\Pi\, Q(\Pi) = \det(\Pi) I$ car $\det(\Pi) = 1$

D'où $\Pi\, Q(\Pi) = I$

$\Leftrightarrow \Pi(\mathrm{tr}(\Pi) I - \Pi) = I$

$\Leftrightarrow \Pi\,\mathrm{tr}(\Pi) - \Pi^2 = I$

$$\boxed{\Leftrightarrow \Pi^2 = \Pi\,\mathrm{tr}(\Pi) - I}$$

b) On raisonne par récurrence

$\mathcal{P}(n)$: « $M^n = -a_{n-1} I + a_n M$ »

Initialisation : $n = 1$

$M = -a_0 I + a_1 M = M$

$\mathcal{P}_1$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie

$M^n = -a_{n-1} I + a_n M$ par hypothèse de récurrence

$\Rightarrow M^{n+1} = -a_{n-1} M + a_n M^2$

$= -a_{n-1} M + a_n (\mathrm{tr}(M) M - I)$ d'après 3. a)

$= -a_n I + M (-a_{n-1} I + a_n \mathrm{tr}(M) I)$

Or, $a_{n+1} = \mathrm{tr}(M) P_n(\mathrm{tr}(M)) - P_{n-1} P_n(\mathrm{tr}(M))$

$\Leftrightarrow a_{n+1} = a_n \mathrm{tr}(M) - a_{n-1}$

Donc $M^{n+1} = -a_n I + a_{n+1} M$

$\mathcal{P}_{n+1}$ vraie

Conclusion :

$$\forall n \geq 1, \quad M^n = -a_{n-1} I + a_n M$$

c) On a alors $\mathrm{tr}(M^n) = \mathrm{tr}(-a_{n-1} I + a_n M)$

$= -a_{n-1} \mathrm{tr}(I) + a_n \mathrm{tr}(M)$ car la trace est linéaire

$= -P_{n-1}(\mathrm{tr}(M)) \mathrm{tr}(I) + P_n(\mathrm{tr}(M)) \mathrm{tr}(M)$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 310657

Emplacement QR Code

Code épreuve : 296 | Nombre de pages : | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées ENL

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc il existe Q_n tel que $Q_n(\mathrm{tr}(A)) = P_{n-1}(\mathrm{tr}(A))\,\mathrm{tr}(A) + P_n(\mathrm{tr}(A)) \times \mathrm{tr}(I_n)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe Q_n tel que $\mathrm{tr}(A^n) = Q_n(\mathrm{tr}(A))$

Et $\forall n \geq 1$, $Q_n = -P_{n-1}\,\mathrm{tr}(I) + P_n \mathrm{tr}(A)$

8.a)
```
def P(n,x):
    P0 = 0
    P1 = 1
    for k in range (1, n+1):
        c = 2*x*P1 - P0
        P0 = P1
        P1 = c
    return (P0)
```

8.b)
```
def Puissance (n, M):
    n = np.shape(M)
    trace = 0
    for k in range (n):
        trace = M[k,k] + trace  # on calcule déjà tr(M)
    return trace
~~for k in range (0, n):~~
```

suite du programme au dos

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

```
Puissance = 0
for k in range (0, n ):
    Puissance =-p (k ,trace)* np.eye(n) + P(k+1, trace)*Π + puissance
return (Puissance)
```

Exercice 3 :

PARTIE A

1. a) N : donne le nombre de lancers effectués
Or, on relance la pièce une seule fois après le 1er pile
Donc N-1 compte le nombre de lancers jusqu'au premier pile

$(N-1)(\Omega) = [\![1, +\infty[\![$

$[N-1 = k] = \bigcap_{i=1}^{k-1} P_i \cap P_k$

$P([N-1=k]) = P\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} F_i \cap P_k\right)$

$= \prod_{i=1}^{k-1} P(F_i) * P(P_k)$ par indépendance des lancers

$= (1-p)^{k-1} p$

$$\forall k \geq 1,\ P([N-1=k]) = (1-p)^{k-1} p$$

b) On reconnait que N-1 suit une loi géométrique de paramètre p :

Donc $N(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$

$P([N=k]) = P([N-1=k-1]) = (1-p)^{k-2} p$

Donc N admet une espérance si et seulement si $\sum_{k\geq 2} k P(N=k)$ converge absolument

Soit $A \geq 2$, $\sum_{k=2}^{A} k P([N=k]) = \sum_{k=2}^{A} k (1-p)^{k-2} p$

$= p \sum_{k=2}^{A} k q^{k-2}$

$= p \sum_{k=0}^{A-2} (k+2) q^k$

On $= p \sum_{k=0}^{A-2} (k-1+3) q^k$

$= p \sum_{k=0}^{A-2} (k-1) q^k$

$$\sum_{k=2}^{A} k P([N=k]) = p \sum_{k=2}^{A} k q^{k-2}$$

$$= p \sum_{k=0}^{A-2} (k+2) q^k$$

$$= pq \sum_{k=0}^{A-2} k q^{k-1} + 2p \sum_{k=0}^{A-2} q^k \quad \text{avec } |q| < 1$$

On reconnait une série géométrique dérivée d'ordre 1 convergente et une série géométrique convergente

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

Donc $\sum_{k=2}^{+\infty} k P([N=k]) = pq \times \frac{1}{(1-q)^2} + 2p \frac{1}{1-q}$

$$= \frac{pq}{p^2} + \frac{2p}{p}$$

$$= \frac{1-p}{p^2} + 2$$

On a $E(N-1) = E(N) - 1$

Or $N \hookrightarrow \mathcal{G}_j(p)$ donc $E(N-1) = \frac{1}{p}$

Donc $E(N) = E(N-1)+1 = \frac{1}{p}+1 = \frac{1+p}{p}$

$V(N) = V(N-1) = \frac{1-p}{p^2}$

Ainsi, $E(N) = \frac{1+p}{p}$ et $V(N) = \frac{1-p}{p^2}$

2. a)

$[[N=n] \cap S]$ est réalisé si le premier pile donné au rang $n-1$ et que le lancer suivant donne également pile

Autrement dit :

$$[N=n] \cap S = \bigcap_{i=1}^{n-2} F_i \cap P_{n-1} \cap P_{n}$$

D'où :

$$P([[N=n] \cap S]) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n-2} F_i \cap P_{n-1} \cap P_{n}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n-2} P(F_i) \times P(P_{n-1}) \times P(P_n) \quad \text{par indépendance des lancers}$$

$$= (1-p)^{n-2} p^2$$

$$\forall n \geq 2,\ P([[N=n] \cap S]) = (1-p)^{n-2} p^2$$

b) On a $([N=n])_{n\geq 2}$ qui forme un système complet d'événement

Donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(S) = \sum_{n=2}^{+\infty} P([N=n] \cap S]$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} (1-p)^{n-2} p^2 \quad \text{d'après ce qui précède}$$

$$= p^2 \sum_{n=0}^{+\infty} q^n$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 310657

Emplacement QR Code

Code épreuve : 206 | Nombre de pages : | Session : 2026

Épreuve de : Maths. Appli. ENL

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$= p^2 \times \frac{1}{p} = p$

Donc $P(S) = p$

3. a)

On a R : nombre de répétitions de la première expérience aléatoire

Donc on continue l'expérience jusqu'à ce que S se réalise

Donc $R \hookrightarrow \mathcal{G}(P(S))$

Avec $\forall k \geq 1$, $P([R=k]) = (1-P(S))^{k-1} P(S)$

b)

Donc $E(R) = \frac{1}{P(S)} = \frac{1}{p}$

On a en moyenne $\frac{1}{p}$ piles isolés avant le premier double pile

4.

a) $[N_i = 0]$ se réalise si $R < i$

Donc $\forall i \geq 1$, $P([N_i = 0]) = P([R < i])$

$$= \sum_{k=1}^{i-1} P([R = k])$$

$$= \sum_{k=1}^{i-1} (1-p)^{k-1} p$$

$$= p \sum_{k=0}^{i-2} q^k$$

$$= p \times \frac{1 - q^{i-1}}{1-q} = 1 - q^{i-1}$$

$$\boxed{P([N_i = 0]) = 1 - q^{i-1}}$$

b)

$[N_i = k]$ se réalise si on réalise $k-1$ lancers lors de la i-ème répétition et que $[R \geq i]$

$\forall k \geq 2$:

$$P([N_i = k]) = P([R \geq i] \cap [N_i = k])$$

$$= P([R \geq i]) \times P_{[R \geq i]}([N_i = k])$$

$$= P([R \geq i]) \times P([N = k]) \quad \text{car } N_i \text{ sachant } (R \geq i) \text{ suit la loi de } N$$

$$= \sum_{k=i}^{+\infty} P([R = k]) \times (1-p)^{k-2} p$$

$$= p \sum_{k=i}^{+\infty} q^{k-1} \times q^{k-2} p$$

$$= p \sum_{k=0}^{+\infty} q^{i+k-1} \times q^{k-2} p$$

$$= pq^{i-1} \sum_{k=0}^{+\infty} q^k \times q^{k-2} p$$

$$= pq^{i-1} \times \frac{1}{p} \times q^{k-2} p$$

$$= p\, q^{i+k-3}$$

Donc $\forall k \geq 1,\ P([N_i = k]) = pq^{i+k-3}$

c) N_i admet une espérance ssi $\sum_{k \geq 2} kP(N_i = k)$ converge absolument

$$\sum_{k=2}^{+\infty} kP(N_i = k) = pq^{i-1} \sum_{k=2}^{+\infty} kq^{k-2}$$

$$= pq^{i-1} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+2) q^k$$

$$= pq^{i-1} \sum_{k=0}^{+\infty} kq^k + pq^{i-1} \sum_{k=0}^{+\infty} 2q^k$$

$$= pq^i \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} + 2pq^{i-1} \sum_{k=0}^{+\infty} q^k$$

On manipule des séries géométriques convergentes // dérivées géométriques convergentes avec $|q| < 1$

$$= pq^i \frac{1}{p^2} + 2pq^{i-1} \frac{1}{p}$$

$$= q^i \frac{1}{p} + 2q^{i-1} \quad = q^{i-1} \left(\frac{q}{p} + 2 \right)$$

$$= q^{i-1} \left(\frac{2p + 1 - p}{p} \right)$$

$$= q^{i-1} \times \frac{p+1}{p}$$

Avec $0 \times P(N_i = 0) = 0$

Donc $E(N_i) = 0 \times P(N_i = 0) + \sum_{k=2}^{+\infty} kP(N_i = k)$

$$\boxed{E(N_i) = q^{i-1} \frac{1-p}{p}}$$

5.

$$\sum_{i\geq 1} E(N_i) = \sum_{i\geq 1} q^{i-1}\frac{1+p}{p}$$

On pose $A \geq 1$, $\sum_{i=1}^{A} q^{i-1}\frac{1+p}{p} = \frac{1+p}{p}\sum_{i=1}^{A} q^{i-1}$

$$= \frac{1+p}{p}\sum_{i=0}^{A-1} q^i$$

On reconnait une série géométrique avec $|q|<1$

Donc $\sum_{i=1}^{+\infty} E(N_i) = \frac{1+p}{p}\sum_{i=0}^{+\infty} q^i = \frac{1+p}{p} \times \frac{1}{p} = \frac{1+p}{p^2}$

$$\boxed{\text{Donc } \sum_{i=1}^{+\infty} E(N_i) = \frac{1+p}{p^2}}$$

$\forall \omega \in \Omega$, $T(\omega) = \sum_{i=1}^{+\infty} N_i(\omega)$

6.

a) Soit $k \in [\![0, n]\!]$

$[T=k]$ se réalise si le nombre total de lancers effectués est égal à k

Or, $T = \sum_{k=1}^{n} X_k$

D'où $P([T=k]) = P(N_1 + \cdots + N_n = k)$

b) On admet $\sum_{k=1}^{n} k\,P(T=k) \leq \sum_{i=1}^{n} E(N_i)$

c) On sait que $\sum_{i\geq 1} E(N_i)$ converge

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 310657

Emplacement QR Code

Code épreuve : 296 | Nombre de pages : | Session : 2023

Épreuve de : Maths appli. ESL

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{k\geq 1} kP(T=k)$ converge aussi

Dès lors, T admet alors une espérance

7.

PARTIE B

8.
```
def Exp_1(p):
    N = 1
    while rd.random() > p :
        N = N+1
    if rd.random < p :
        S = 1
    else :
        S = 0
    return N+1, S
```

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

9.
```
def Exp_2(p):
    R = 0
    T = 0
    while Exp_1(p) != 1:
        R = N + 1
        T = Exp_1(p) + T
    return (R, T)
```

10. a)
```
def Freq_T(n, p):
    A = []
    for k in range(10**4):
        A.append(Exp_2(p))
    F = sum(A)
    Freq =
```

b) cohérent quand $n = 4$ et $p = \frac{1}{2}$ car $\frac{1}{2}$ avec $\frac{1}{2}$ d'avoir pile on s'attend à au moins 10^6 du temps avoir 4 lancers

PARTIE C

$$\forall n \geq 1,\ Y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } P_n P_{n+1} \text{ réalisé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

11. $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(P(P_n P_{n+1}))$

Donc $E(Y_n) = P(P_n P_{n+1}) = p^2$

$V(Y_n) = P(P_n P_{n+1})(1 - P(P_n P_{n+1})) = p^2(1-p^2)$

12) $n \geq 1$ et $n \geq n+2$

Y_n et Y_{n+1} ne sont pas indépendantes car elles partagent la réalisation de P_{n+1} comme condition

En revanche, Y_n et Y_m sont indépendantes car $m \geq n+2$ et que les lancers sont indépendants

Y_n et Y_{n+1} non indépendantes Y_{n+2} et Y_n indépendantes

b) On a directement $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_m) = 0$ car Y_n et Y_m indépendantes

D'après la formule de Koenig Huygens :

$$\mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+1}) = E(Y_n Y_{n+1}) - E(Y_n)E(Y_{n+1})$$

Or $E(Y_n Y_{n+1}) = P(P_n P_{n+1} \cap P_{n+1} P_{n+2}) - E(Y_n)E(Y_{n+1})$

$$= P(P_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+2}) - p^4$$

$$= p^3 - p^4$$

$\mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+1}) = p^3(1-p)$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$$

13. a) $E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} E(Y_k)$ par linéarité de l'espérance

$$= \sum_{k=1}^{n} p^2 = np^2$$

$$V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(Y_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{Cov}(Y_k, Y_{k+1})$$

$$= np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p) \text{ d'après ce qui précède}$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094