Copie anonyme - n°anonymat : 310657

N7-00179
310657
Mat Appli

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 33	Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Appliquées EDHEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1

$$\begin{cases} U_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n^2 - U_n + 1 \end{cases}$$

1)
```
def suite_u(a,n):
    u = a
    for k in range (1, n+1):
        u = u*2 - u + 1
    return u
```

2) On suppose $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, avec (U_n) définie par récurrence

Donc d'après le théorème du point fixe :

$$l = l^2 - l + 1$$

$$\Leftrightarrow l^2 - 2l + 1 = 0$$

On a Δ son discriminant $\Delta = 0$

Donc $l = \frac{-(-2)}{2} = 1$

Alors $l = 1$

3. a) On raisonne par récurrence

$\mathcal{P}(n)$: « $U_n \leq U_{n+1}$ et $U_n \geqslant a$ »

Initialisation : $n = 0$

$U_0 = a$ et $U_1 = a^2 - a + 1$

Or, $a > 1$ donc $a^2 - a > 0$ et $a^2 - a + 1 > 0$

D'où $U_1 - U_0 = a^2 - 2a + 1$ qui s'annule qu'en $a = 1$ or $a > 1$

Donc $U_1 - U_0 \geqslant 0 \iff U_1 \geqslant U_0$

$\mathcal{P}_1$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie

$U_n \leq U_{n+1}$ par hypothèse de récurrence

Or, on étudie $f : t \longmapsto t^2 - t + 1$ dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = 2t - 1$

D'où $f'(t) \geqslant 0 \iff t \geqslant \frac{1}{2}$

Or, par hypothèse de récurrence, $U_n \geqslant a > 1$

Donc f est croissante sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ ensemble d'application de (U_n).

Par croissance stricte de f on a

$$f(U_n) \leq f(U_{n+1})$$

$$\Leftrightarrow \quad U_{n+1} \leq U_{n+2}$$

Et $\quad U_n \geqslant a \Leftrightarrow f(U_n) \geqslant f(a)$

$$\Leftrightarrow \quad U_{n+1} \geqslant U_1 \geqslant U_0 = a$$

$\mathcal{P}_{n+1}$ vraie

Conclusion :

(U_n) croissante et $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geqslant a$

c) On a donc (U_n) croissante et strictement supérieure à 1

D'après la question 2, si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $\ell = 1$

Or, (U_n) croissante et supérieure à 1 donc (U_n) diverge nécessairement (car non constante)

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$$

4) On a :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n^2} = \frac{U_n^2 - U_n + 1}{U_n^2} = 1 - \frac{1}{U_n} + \frac{1}{U_n^2}$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_{n+1}}{U_n^2} = 1$ car $U_n \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

Ainsi, $U_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} U_n^2$ (2)

5. a) D'après 3. b)

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq a > 1$ et $u_{n+1} \geq a > 1$

Donc $\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$ existe car $u_n \neq 1$ et $u_{n+1} \neq 1$

De plus, $\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{u_{n+1} - 1 - (u_n + 1)}{(u_n - 1)(u_{n+1} - 1)}$

$$= \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{(u_n - 1)(u_n^2 - u_n)}$$

$$= \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n(u_n^2 - 2u_n + 1)} = \frac{1}{u_n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{u_n}$$

b) En sommant termes à termes

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k - 1} - \frac{1}{u_{k+1} - 1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u_0 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} \quad \text{par télescopage}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{a - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$$

c) On a alors $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{u_{n+1} - 1} = 0$ car $u_{n+1} \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

D'où $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{a - 1}$

Ainsi, $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{u_n}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{a - 1}$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 310657

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 33 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Appliquées EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

On suppose désormais $a = 2$

6. a) On suppose $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ P(X=n) = \frac{1}{U_n}$

Donc $\forall n \geq 0$, $P(X=n) \geq 0$ car $\frac{1}{U_n} \geq 0$

Et $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{U_n} = \frac{1}{a-1} = \frac{1}{2-1} = 1$

Donc on définit bien une loi

b) On raisonne par récurrence sur $n \geq 2$

$\mathcal{P}(n)$: $2^n(2^n-1)+1 \geq 2^{n+1}$

Initialisation : $n = 2$

$2^2(2^2-1)+1 = 4(4-1)+1 = 13$

et $2^3 = 8$ or, $13 > 8$

$\mathcal{P}_2$ vraie

Hérédité : Soit $n \geq 2$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie

$2^n(2^n-1)+1 \geq 2^{n+1}$ d'après l'hypothèse de récurrence

On suppose $\forall n \geq 2,\ 2^n(2^n-1)+1 \geq 2^{n+1}$

$\Leftrightarrow (2^n-1)+1 \geq 2$

$\Leftrightarrow 2^n \geq 2$ Or $n \geq 2$ donc cela est vrai tout le temps

Ainsi, $\forall n \geq 2,\ 2^n(2^n-1)+1 \geq 2^{n+1}$

c) On raisonne par récurrence sur $n \geq 2$

$\mathcal{P}(n)$: « $U_n \geq 2^n$ »

Initialisation : $n=2$

$U_0 = 2$, $U_1 = U_0^2 - U_0 + 1 = 4-2+1 = 3$, $U_2 = 3^2 - 3 + 1 = 7$

Et $2^2 = 4$ Or $7 > 4$

Donc $\mathcal{P}_2$ vraie

Hérédité : Soit $n \geq 2$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie

$U_n \geq 2^n$ d'après l'hypothèse de récurrence

Or, $U_n(U_n-1)+1 \geq 2^n(2^n-1)+1$ par opérations

$\Leftrightarrow U_{n+1} \geq 2^n(2^n-1)+1 \geq 2^{n+1}$ d'après 6.b)

$\Leftrightarrow U_{n+1} \geq 2^{n+1}$

$\mathcal{P}_{n+1}$ vraie

Conclusion : $\forall n \geq 2,\ U_n \geq 2^n$

Pour $n=0$, $U_0 = 2 > 1$

Pour $n=1$, $U_1 = 3 > 2$

L'inégalité reste vraie pour $n=0$ et $n=1$

d) X possède une espérance si et seulement si $\sum_{n\geq 0} n P(X=n)$ converge absolument

Or, $\forall n \geq 0$, $U_n \geq 2^n \Leftrightarrow \frac{1}{U_n} \leq \frac{1}{2^n}$

$\Leftrightarrow \frac{n}{U_n} \leq n\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Avec $\sum_{n\geq 0} n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ qui converge comme série géométrique dérivée d'ordre 1 avec $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$

Par critère de comparaison sur séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 0} n P(X=n)$ converge

Ainsi, X admet une espérance

De plus, X admet une variance si et seulement si X admet un moment d'ordre 2

On a de la même façon $\frac{n^2}{U_n} \leq n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Or, $\sum_{n\geq 0} n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n\geq 0} \left(n(n-1)+n\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Or, $\sum_{n\geq 0} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge comme série géométrique dérivée d'ordre 2 avec $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$

Et, $\sum_{n\geq 0} n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge comme précédemment

D'où $\sum_{n\geq 0} \left(n(n-1)+n\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge aussi

Par critère de convergence sur série à termes positifs,
$\sum_{n\geq 0} n^2 P(X=n)$ converge

Donc X admet une variance

Exercice 2

$$(S) : \forall n \in \mathbb{R} \begin{cases} f'(n) = f(n) - 2g(n) \\ g'(n) = 2f(n) + 5g(n) \end{cases}$$

Et $f(0) = g(0) = 1$

1. a) On a directement :

D'après le Problème de Cauchy, ce problème possède un seul couple (f, g) solution

b) On a f et g dérivables une fois sur $\mathbb{R}$

Donc $\forall n \in \mathbb{R}$, $f'(n) = f(n) - 2g(n)$ on a donc f' dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme

Et comme $g'(n) = 2f(n) + 5g(n)$ on a donc g' dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme

Ainsi f et g 2 fois dérivables sur $\mathbb{R}$

2. a) $\forall n \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f''(n) - 6f'(n) + 9f(n) &= f'(n) - 2g'(n) + 9f(n) - 6f'(n) \\ &= -5f'(n) - 2g'(n) + 9f(n) \\ &= -5f(n) + 10g(n) - 4f(n) - 10g(n) + 9f(n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 310657

Emplacement QR Code

Code épreuve : 208 | Nombre de pages : 33 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Appliquées EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Ainsi, f est solution de $y'' - 6y' + 9y = 0$

b) $f'(0) = f(0) - 2g(0) = 1 - 2 = -1$

$f'(0) = -1$

c) On prend l'équation caractéristique de $y'' - 6y' + 9y = 0$

$\Leftrightarrow r^2 - 6r + 9 = 0$

$\Delta = 36 - 36 = 0$

Donc $r = \frac{6}{2} = 3$

Donc $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = (\lambda_1 + \mu x) e^{3x}$

Or $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \mu e^{3\times 0} + \mu \times 3 e^{3\times 0} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \mu = -\frac{1}{4} \end{cases}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{4} x e^{3x}$

c) On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $2g(x) = f(x) - f'(x)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

c) $\forall x \in \mathbb{R}, 2g(x) = \underbrace{-4xe^{3x}}_{} + \underbrace{2e^{3x}}_{}$

$= e^{3x}(-4x+2)$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) = \frac{1}{2}e^{3x}(-4x+2) = (2-4x)e^{3x}$

3. On pose $h = f + g$

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ g'(x) = 2f(x) + 5g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ f'(x) + g'(x) = f(x) - 2g(x) + 2f(x) + 5g(x) \end{cases}$

Avec $L_2 = L_1 + L_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ h'(x) = 3h(x) \end{cases}$

Ainsi, $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ h'(x) = 3h(x) \end{cases}$

b) $h(0) = f(0) + g(0) = 1 + 1 = 2$

De plus $h' = 3h \Leftrightarrow h' - 3h = 0 \Leftrightarrow h = Ce^{3x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Or, $h(0) = 2 \Leftrightarrow C = 2$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 2e^{3x}$

c)

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ g'(x) = 2f(x) + 5g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ h'(x) = 3h(x) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ h(x) = 2e^{3x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ f(x) + g(x) = 2e^{3x} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3f(x) - 4e^{3x} = f'(x) \\ f(x) + g(x) = 2e^{3x} \end{cases}$ $L_1 = L_1 + 2L_2$

Ainsi, $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 3f(x) - 4e^{3x} \\ f(x) + g(x) = 2e^{3x} \end{cases}$

4. $(ED) : \forall x \in \mathbb{R}, \ y' = 3y - 4e^{3x}$

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \ f_a(x) = axe^{3x}$
f_a dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée

$\forall x \in \mathbb{R}, \ f_a'(x) = ae^{3x} + 3axe^{3x}$

$f_a' = 3f_a - 4e^{3x} \Leftrightarrow ae^{3x} + 3axe^{3x} = 3axe^{3x} - 4e^{3x}$

$\Leftrightarrow ae^{3x} = -4e^{3x}$
$\Leftrightarrow a = -4$

Donc f_a solution de (ED) si $a = -4$

b) D'où f_a solution de $f_a'(x) = 3f_a(x) - 4e^{3x}$
Donc $f_a = f$

$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = -4xe^{3x}$

c) Donc on a

$$\begin{cases} f'(x) = 3f(x) - 4e^{3x} \\ f(x) + g(x) = 2e^{3x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -4xe^{3x} \\ g(x) = (2-4x)e^{3x} \end{cases}$$

5. a)

```
def f(x):
    return (-4)*x*np.exp(3*x)

def g(x):
    return (2-4*x)*np.exp(3*x)
```

b)

```
def Tracé():
    x = np.linspace(-1/2, 1/2, 100)
    Y1 = f(x)
    Y2 = g(x)
    plt.plot(X, Y1, "color = red")
    plt.plot(X, Y2)
    plt.show()
```

Exercice 3

X suit $\mathcal{U}([0,\theta])$ et $X_1, \dots, X_n$ mutuellement indépendantes et de même loi que X

1. Soit F fonction de répartition de X

a)

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq \theta \\ \frac{x}{\theta} & \text{si } x \in [0,\theta] \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

b) $E(X) = \frac{\theta}{2}$ $\quad V(X) = \frac{\theta^2}{12}$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 310657

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 33 | Session : 2026

Épreuve de : Maths Appli EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

2. On pose $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$

a) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$F_n(x) = P([Y_n \leq x]) = P([\max(X_1, \dots, X_n) \leq x])$$
$$= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leq x]\right)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x) \quad \text{par indépendance}$$
$$= \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} 1 & \text{si } x \geq \theta \\ \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x}{\theta}\right) & \text{si } x \in [0, \theta] \\ \prod_{i=1}^{n} 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ F_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > \theta \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^n & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

b) On a F_n C^1 sur $]\theta, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$ comme constante et C^1 sur $[0, \theta]$ comme fonction polynomiale

De plus, $\lim_{x \to \theta} F_n(x) = 1 = F_n(\theta)$

Donc F_n C^0 en θ

Et $\lim_{x \to 0} F_n(x) = 0 = F_n(0)$

Donc F_n C^0 sur 0

Enfin, F_n est une fonction de répartition C^0 sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et θ, donc F_n est une fonction de répartition d'une variable à densité

Y_n est à densité

De plus, f_n une densité telle que

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3) a) Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$

Alors $P([\theta U \leq x]) = P\left(\left[U \leq \frac{x}{\theta}\right]\right)$

$$= \begin{cases} 1 \text{ si } \frac{x}{\theta} \geq 1 \\ \frac{x}{\theta} \text{ si } 0 \leq \frac{x}{\theta} \leq 1 \\ 0 \text{ si } \frac{x}{\theta} < 0 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} 1 \text{ si } x > \theta \\ \frac{x}{\theta} \text{ si } x \in [0, \theta] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On reconnait alors la fonction de répartition de $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,\theta])$

Si $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]) \Rightarrow \theta U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,\theta])$

b) def var_Y (theta, n) :
    X = theta * rd.random()
    Y = X ** n
    return Y

4. a) Y_n admet une espérance si et seulement si :

$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x)\,dx$ converge absolument

Or, f_n est nulle en dehors de $[0,\theta]$ donc l'intégrale est convergente et on a

$$E(Y_n) = \int_0^{\theta} x f_n(x)\,dx = \int_0^{\theta} x \frac{n}{\theta} \frac{x^{n-1}}{\theta^{n-1}}\,dx$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \int_0^{\theta} x^n\,dx$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\theta}$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \times \frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1}\theta$$

Ainsi, $E(Y_n) = \frac{n}{n+1}\theta$

b) On calcule de la même façon le moment d'ordre 2 de Y_n :

$$E(Y_n^2) = \frac{n}{\theta^n} \int_0^{\theta} x^{n+1}\,dx = \frac{n}{\theta^n} \left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^{\theta}$$

$$= \frac{n}{n+2}\theta^2$$

D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$V(Y_n) = E(Y_n^2) - E(Y_n)^2$$

$$= \frac{n\theta^2}{n+2} - \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{(n+1)^2 n\theta^2 - (n+2)n^2\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$$

$$= \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$$

D'où $V(Y_n) = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$

5) On pose $Z_n = \frac{n+1}{n} Y_n$

a) Z_n ne dépend pas de θ donc estimateur de θ

Et $E(Z_n) = \frac{n+1}{n} E(Y_n) = \frac{n+1}{n} \times \frac{n}{n+1} \theta = \theta$

D'où $E(Z_n) = \theta$

b) $V(Z_n) = V\left(\frac{n+1}{n} Y_n\right) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 V(Y_n)$

$$= \frac{(n+1)^2 n\theta^2}{(n+1)^2 n^2 (n+2)} = \frac{\theta^2}{(n+2)n}$$

$$V(Z_n) = \frac{\theta^2}{(n+2)n}$$

6. a) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $\forall \varepsilon > 0$

$$P(|Z_n - E(Z_n)| > \varepsilon) \leq \frac{V(Z_n)}{\varepsilon^2}$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 310657

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 33 | Session : 2026

Épreuve de :

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

b) D'après l'inégalité de Bienaymé Tchebychev :

$\forall \varepsilon > 0,\ P(|Z_n - \theta| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Z_n)}{\varepsilon^2}$

~~Si $n \geq 1$, $V(Z_n) \leq 1$~~

D'où $P([|Z_n - \theta| \geq \varepsilon]) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \times \frac{\theta^2}{n(n+1)}$

$\Leftrightarrow P(|Z_n - \theta| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2} \times \frac{\theta^2}{n+2}$

$\Leftrightarrow P(|Z_n - \theta| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2} \times \frac{\theta^2}{n+2} \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}$ d'après 6.a)

$\Leftrightarrow 1 - P(|Z_n - \theta| \leq \varepsilon) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}$ par passage à l'événement contraire

$\Leftrightarrow P([|Z_n - \theta| \leq \varepsilon]) \geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}$

c) Donc $P(Z_n - \varepsilon \leq \theta \leq Z_n + \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

On pose $a = \frac{1}{n\varepsilon^2}$

$\Leftrightarrow \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n}a}$

Et on prend $a = 0,05$

Donc pour $n \geq 2000$, et plus particulièrement $n = 2000$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$

Donc $P\left(Z_n - \frac{1}{10} \leq \theta \leq Z_n + \frac{1}{10}\right) \geq 1 - a = 0,95$

D'où $\left[Z_n - \frac{1}{10}, Z_n + \frac{1}{10}\right]$ est un intervalle de confiance pour θ au niveau de confiance supérieur à $0,95$

7. Le programme simule Z_{2000} 1000 fois et regarde la fréquence à laquelle Z_{2000} - theta est inférieure ou égale à $\frac{1}{10}$

Autrement dit, elle simule 1000 fois l'intervalle de confiance précédent pour avoir la fréquence quand theta = 6

Problème

PARTIE 1

$\mathcal{E}_n(d)$ ensemble des graphes d'ordre n de diamètre $D = 2$ et de degré maximal d

1. a) $J_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On a $P(x) = x^2 - nx$

$P(J_n) = J_n^2 - n J_n$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - n\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & & \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & & \\ n & \cdots & n \end{pmatrix}$$

$= 0_n$

D'où P un polynôme annulateur de J_n

b) J_n est diagonalisable car J_n est symétrique

Sachant $X^2(X-n)$ polynôme annulateur de J_n, on a alors $Sp(J_n) \subset \{0, n\}$

De plus, $Im(J_n) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Donc par théorème du rang on a $Dim(Ker(J_n)) = n-1$
$Dim(Im(J_n)) = n$

On suppose J_n possède une autre valeur propre que 0 et n

Alors X sont vecteur propre appartient à $\mathrm{Im}(J_n)$
et $\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$ vecteur propre associé à n

Or, par concaténation de familles libres de vecteurs propres, $\left(\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}, X\right)$ est libre

Or, $\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(J_n)$ et $X \in \mathrm{Im}(J_n)$

D'où $\dim(\mathrm{Im}(J_n)) = 2$ et $\dim(\ker(J_n)) = n-2$

ABSURDE

D'où $\underline{Sp(J_n) = \{0, n\}}$

c) On pose $X = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$J_n X = nX \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}nx_1\\ \vdots \\ nx_n\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} x_k = nx_1 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} x_k = nx_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n} = x_1 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n} = x_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ \vdots \\ x_n = x_1 \end{cases}$$

(Ils sont tous égaux à $\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n}$ donc tous égaux entre eux)

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 310657

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 33 | Session : 2026

Épreuve de : Maths Appli EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Ainsi, $J_n X = nX \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ \vdots \\ x_n = x_1 \end{cases}$

d) Donc on a

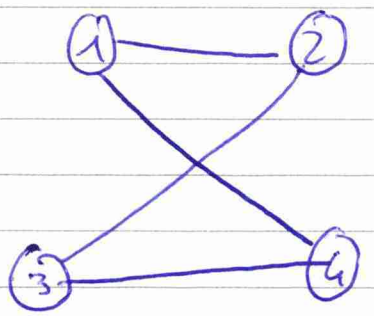
$$J_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix}$$

D'où $E_n(J_n) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Ainsi, $E_n(J_n) = \text{Vect}(U)$ avec $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

PARTIE II

2. a) On a



NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Ce graphe a 4 sommet donc est d'ordre 4

On a le degré maximal qui est 2 car chaque sommet est relié à 2 autres

On a le diamètre D = 2 car la plus grande des distances séparant 2 paires de sommet est 2 (par exemple 4 - 1 - 2)

Donc ce graphe est élément de $E_4(2)$

b) G_1 n'est pas de diamètre 2 (la plus grande distance séparant 1 et 2 est 4 > 2)

G_2 a des sommet ayant un degre superieur à 2 (4 par exemple)

G_3 a 5 sommets, tous d'ordre 2 et de diamètre égal a 2 $G_3 \in E_5(2)$

G_4 de même

Donc $G_3, G_4 \in E_5(2)$

3. Soit $G \in E_n(d)$ et un sommet s fixé

a) Chaque sommet est de degré maximal d

Donc le sommet s en particulier est de degré maximal d

Donc il est au plus adjacent à d sommets

b) On sait que $D = 2$

Donc la plus grande des distances séparant chaque paire de sommets distincts est 2

Donc chaque sommet est au maximum de degré n donc $d(d-1)$ sommet reliés entre eux autre que s avec les d sommets reliés à s

Donc G a au maximum $d(d-1)+d$ sommets autres que s

c) Donc au total, $d + (d-1)d + 1$ sommet de G au maximum car on rajoute le sommet s

Ainsi, $n \leq d + d(d-1) + 1 = d^2 + 1$

$n = d^2 + 1 \Rightarrow$ Graphe de Moore

On prend G un graphe de Moore et A sa matrice d'adjacence

PARTIE 3

$E = (e_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $F = (f_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq r}} \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$

Alors $EF \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})$ et $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,r]\!], g_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} e_{i,k} f_{k,j}$

Soit $B^2 = A^2$ avec $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

4)

A est symétrique car G est non orienté

5. a) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \in \{0,1\}$ parce que A matrice d'adjacence telle que $a_{i,j} = 1$ si i et j sont adjacents et $a_{i,j} = 0$ si i et j non adjacents

Ainsi $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \in \{0,1\}$

b) $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,i} = 0$ car G ne contient aucune boucle donc chaque sommet i ne peut pas être relié à lui même

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,i} = 0$

6. a) Par produit matriciel, on a A^2 dont chaque coefficient $b_{i,j}$ sera la somme du produit des colonnes et des lignes de la matrice A

En reprenant EF, ~~$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{j,k}$~~

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{k,j}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{j,k} \text{ car A est symétrique}$$

Donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{j,k} = b_{i,j}$

b) D'où en reprenant cette égalité :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad b_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} (a_{i,k})^2$$

Or, $a_{i,k} \in \{0,1\}$ donc $a_{i,k} \in \{0,1\}^2$

D'où $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $(a_{i,k})^2 = a_{i,k}$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 310657

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 33 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Appli

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

D'où $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $h_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}$

Or, $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}$ est égal au nombre de sommet adjacents au sommet i

Car l'énoncé précise que chaque sommet est de degré d

Donc $h_{i,i} = d$

7.a) On a d'après l'énoncé, que chaque sommet distinct est relié à tout autre sommet distinct par une chaine de longueur 1 ou 2

Donc 1er cas : si i et j relié avec une chaine de longueur 1 $(i \neq j)$

Alors $a_{i,j} = 1$ et i et j ne sont alors pas reliés par une chaine de longueur 2 (chaque sommet est de degré d)

Donc $h_{i,j} = 0$

2e cas : on fait la même chose à l'inverse

Ainsi, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j$: $\begin{cases} a_{i,j} = 1 \\ h_{i,j} = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a_{i,j} = 0 \\ h_{i,j} = 1 \end{cases}$

b) Donc peu importe le cas on a bien

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j, \quad b_{i,j} + a_{i,j} = 1$

c) D'après la 5.b), $\forall i \in [\![1,n]\!] \quad a_{i,i} = 0$

D'après la 6.b), $\forall i \in [\![1,n]\!] \quad b_{i,i} = d$

Donc $\forall i \in [\![1,n]\!], \quad b_{i,i} + a_{i,i} = d$

8) En calculant $(A^2 + A)$, chaque coefficient $z_{i,j}$ sera égal à

$z_{i,j} = b_{i,j} + a_{i,j} \quad (i \neq j)$

$z_{i,i} = b_{i,i} + a_{i,i} \quad (i = j)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in [\![1,n]\!], \ z_{i,i} = d \\ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \ z_{i,j} = 1 \end{cases}$

Donc avec $(d-1)I_n + J_n$, on a bien d sur la diagonale et 1 partout ailleurs

Ainsi, $A^2 + A = (d-1)I_n + J_n$

PARTIE 4

$U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

9. A est diagonalisable car symétrique

10) a)

On a $AU = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1,k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} \end{pmatrix}$

Or, d'après 6.b, $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = d$ pour $i \in [\![1, n]\!]$

Donc $\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1,k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ \vdots \\ d \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Ainsi, $AU = dU$

b) Donc on a $AU = dU$ avec U vecteur non nul

D'après la définition de cours, d est valeur propre de A

11) Soit $\lambda \in Sp(A)$ de vecteur propre X

a) D'après la question 8, $J_n = A^2 + A - (d-1)I_n$

D'où $J_n X = A^2X + AX - (d-1)X$

$\Leftrightarrow J_n X = \lambda^2 X + \lambda X - (d-1)X$ car $AX = \lambda X \Rightarrow A^2X = \lambda^2 X$

$\Leftrightarrow J_n X = (\lambda^2 + \lambda - d + 1)X$

b) On suppose $\lambda = d$

Alors $J_n X = (d^2 + d - d + 1) X = (d^2 + 1) X$

$= nX$ car G graphe de Moore

Or, le sous-espace propre associé à la valeur propre n pour la matrice J_n est de dimension 1, donc X peut nécessairement être combinaison linéaire de U qui est le seule vecteur de $E_n(J_n)$

Ainsi, $X \in Vect(U)$

~~c) On a l'équation $\lambda^2 + \lambda - d + 1 = n$~~

Et donc on a $AX = dX$ qui a pour seule solution X le vecteur propre associé à d car $E_n(J_n)$ est de dimension 1

Donc $\dim E_d(A) = 1$

c) On a l'équation $\lambda^2 + \lambda - d + 1 = n$

$\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - d + 1 = d^2 + 1$ car G graphe de Moore

$\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - d^2 - d = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - d(d+1) = 0$

Cette équation a pour ~~solution~~ solution $\lambda = d$ car $d^2 + d - d^2 - d = 0$

Le reste des solutions étant non nulles, ne sera pas vecteur propre de J_n et donc pas ~~vecteur~~ valeur propre de A

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 310657

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 33 | Session : 2026

Épreuve de : Maths Appli

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Ainsi, la seule solution de $\lambda^2+\lambda-d+1=n$ est $\lambda=d$ = valeur propre de A

d) Sachant que la seule autre valeur propre de J_n est 0, on a alors $J_n X=(\lambda^2+\lambda-d+1)X$ qui est vérifié si et seulement si $(\lambda^2+\lambda-d+1)=d$ ou $(\lambda^2+\lambda-d+1)=0$

Donc si $\lambda \neq d$, $\lambda^2+\lambda-d+1=0$

e) Donc on résout $\lambda^2+\lambda-d+1=0$

$\Delta = 4d-3$ Son discriminant strictement positif car $d \geq 4$

D'où 2 solutions :

$$b=\frac{-1-\sqrt{4d-3}}{2} \qquad c=\frac{-1+\sqrt{4d-3}}{2}$$

qui sont les seules autres valeurs propres possibles de A

PARTIE 5

On admet $Tr(MN) = Tr(NM)$

12.a) On suppose $A = PBP^{-1}$ avec $P \in GL_n(\mathbb{R})$

Donc $Tr(A) = Tr(PBP^{-1}) = Tr(BPP^{-1}) = Tr(B)$

Donc A et B semblables $\Rightarrow Tr(A) = Tr(B)$

b) On a A diagonalisable et on suppose d unique valeur propre de A

On a donc X seul vecteur propre associé à d d'après 11.b)
Or, toute matrice est diagonalisable si et seulement si il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres

Donc A non diagonalisable

ABSURDE

Donc au moins un des réels a ou c est valeur propre de A

On pose B une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblable à A

13) Sachant que toute matrice diagonalisable est semblable à une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont répétés autant de fois qu'ils ont de vecteurs propres associés

Alors comme $\dim E_d(A) = 1$, d ne sera répété qu'une seule fois

Ainsi : M comporte un seul élément diagonal égal à d

De plus, le reste des éléments diagonaux est alors les autres valeurs propres de A répétées autant de fois qu'elles ont de vecteurs propres.

14) Sachant $D = 2$, cela veut dire que la plus grande distance séparant chaque paire de sommet est égale à deux, on ne peut pas avoir de sommets de degré 1 sinon on ne pourrait pas relier deux paires de sommets avec distance 2

Ainsi, on ne peut pas avoir $d = 1$

15) On suppose la valeur propre de A autre que d

a) On a donc d unique élément diagonal de M et tout le reste prend b pour valeur car c'est la seule autre valeur propre

Or, $\Delta \in \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ Donc $\Delta = \mathrm{Diag}(d, \underbrace{b, \dots, b}_{(n-1) \text{ fois}})$

Ainsi, $\mathrm{Tr}(\Delta) = d + (n-1)b$

Or, $\mathrm{Tr}(A) = 0$ car $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,i} = 0$

Et on se souvient d'après (2.a) que deux matrices semblables ont la même trace

Donc $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(\Delta) \iff d + (n-1)b = 0$

b) On a $b = \dfrac{-1 + \sqrt{4d-3}}{2}$

D'où $d + (n-1)\dfrac{-1 + \sqrt{4d-3}}{2} = 0$

Or, $(n \cdot 1) = (d^2 + 1 - 1) = d^2$ car 6 de Rocore

$\Leftrightarrow d = \dfrac{-d^2 + d^2\sqrt{4d-3}}{2}$

$\Leftrightarrow 1 = \dfrac{-d + d\sqrt{4d-3}}{2}$ car $d \neq 0$

$\Leftrightarrow 2 = -d + d\sqrt{4d-3}$

$\Leftrightarrow d - 2 = d\sqrt{4d-3}$

Donc $\underline{d - 2 = d\sqrt{4d-3}}$

c) On a alors $(d-2)^2 = d^2(4d-3)$

~~$\Rightarrow d = 1$~~

~~Or, cela est impossible d'après 15. c)~~

$\Leftrightarrow d^2 - 4d + 4 = 4d^3 - 3d^2$

$\Leftrightarrow 4d^2 - 4d + 4 = 4d^3$

$\Leftrightarrow 4d^3 - 4d^2 + 4d - 4 = 0$

$\Leftrightarrow d^3 - d^2 + d - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (d-1)(d^2 + bd + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (d-1)(d^2 + 1) = 0$ par identification de coefficients

$\Rightarrow d = 1$

Or cela est impossible d'après 15. c)

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 310657

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 33 | Session : 2026

Épreuve de : Maths Appli EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

16) de la même façon que pour la question 15, on pourrait montrer que c la SEULE valeur propre autre que d de A amenerait à $d + (n-1)c = 0$ et à une nouvelle contradiction

Donc b ET c doivent être valeur propres en même temps par déduction

Ainsi, $Sp(A) = \{d, b, c\}$

FIN

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

/

/

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094