Copie anonyme - n°anonymat : 761503

E7-00021 761503 Maths T

Code épreuve : 285 | Nombre de pages : 32 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques T

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

exo 1

Partie I :

1) $R(x) = (x^2-4)(x-2)$

$(x^2-4)(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)=0$ ou $(x^2-4)=0$

$\Leftrightarrow x=2$ ou $x^2=4$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{4}$ ou $-\sqrt{4}$

$\Leftrightarrow x=2$ ou -2

Les racines du polynôme R sont donc 2 et -2

2) On sait que R est un polynôme annulateur de M donc les valeurs propres possibles de M sont à chercher parmis les racines de R.

(D'après q1) on en conclue que les valeurs propres possibles de M sont 2 et -2

3) $MU = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2U$

$$MV = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 2V$$

4) On en déduit que -2 ~~et 2 sont bi~~ est bien une valeur propre de M associé au vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ puisque $MU = -2U$

2 est également une valeur propre de M associé au vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

5) On sait que $(M^2 - 4I)(M - 2I) = 0$

donc $M^3 - 2M - 4M + 8I = 0$

$\Leftrightarrow M^3 - 2M - 4M = -8I$

$\Leftrightarrow M^3 - 6M = -8I$

$\Leftrightarrow M(M^2 - 6I) = -8I$

$\Leftrightarrow M\left(\frac{1}{-8}(M^2 - 6I)\right) = I$

M est donc inversible et admet comme inverse $M^{-1} = -\frac{1}{8}(M^2 - 6I)$

Partie II ; Soit $n \in \mathbb{N}$

6) $I_3 + N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d'une part

T^2 :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T$$

$$T \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T^2$$

Finalement $\underline{T^2 = I + N}$

7) N^2 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} N$$

$$N \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{N^2 = O_2}$$

$\underline{\text{donc } \forall n \geq 2,\ N^n = O}$

8) $I \times N = N \times I$

les matrices sont donc commutatives.

ainsi, d'après ~~le théorème~~ la formule du binôme de Newton :

$$T^{2n} = (I+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I^{n-k}$$

or, $I^{n-k} = I$ donc $N^k I^{n-k} = N^k$

et $(I+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k$

on rappel que $N^n = O$, $\forall n \geq 2$ donc

$$(I+N)^n = \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N^1$$

$$= I + nN$$

Finalement, $T^{2n} = I + nN$ $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9) ~~$T^{2n+1} = I + (n+1)N$~~
~~$= I + nN + N$~~

$T^{2n+1} = T^{2n} \times T$

$T^{2n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 2n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$T^{2n+1} = T^{2n} \times T$

$T^{2n} \times T$: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & n \\ 0 & 1 & 2n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

donc $T^{2n+1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & n \\ 0 & 1 & 2n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie III

10) $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On remarque que T est une matrice triangulaire supérieur à coefficient diagonaux

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 761503

Emplacement QR Code

Code épreuve : 285 | **Nombre de pages :** 32 | **Session :** 2026

Épreuve de : Mathématiques T.

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

non nuls donc T est inversible

En utilisant le pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 \times (-1)$$

donc $T^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

11) $(T^{-1})^2 \times$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$T^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}(T^{-1})^2$$

Finalement $(T^{-1})^2 = I - N$

12) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$(T^{-1})^2 = I - N$

$I \times N = N \times I$ donc elles commutent
et $(T^{-1})^{2n} = (I-N)^n$

En utilisant le binôme de Newtone :

$$(I-N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-N)^k I^{n-k}$$

on rappel que $\forall n \geq 2$, $N^n = 0$ donc $-N = 0$

$(I-N)^n = \binom{n}{0}(-N)^0 + \binom{n}{1}(-N)^1$ (car $(-N)^k \times I^{n-k} = (-N)^k$)

$= 1 \times I + n(-N)$

$= I - nN$

et $\underline{(T^{-1})^{2n} = I - nN}$

$(T^{-1})^{2n+1} = (T^{-1})^{2n} \times T$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T$$

$$(T^{-1})^{2n} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -n \\ 0 & 1 & -2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -n \\ 0 & 1 & -2n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (T^{-1})^{2n+1}$$

Finalement, $(T^{-1})^{2n} = I - nN$

et $(T^{-1})^{2n+1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -n \\ 0 & 1 & -2n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

13) $\forall k \in \mathbb{N}$, par définition on sait que $(T^{-1})^k = (T^k)^{-1}$

car

14) $\forall j \in \mathbb{Z}$,

$$T^{2j} = (T^2)^j = (T^j)^2$$

$$T^{2j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & j \\ 0 & 1 & 2j \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $T^{2j+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & j+1 \\ 0 & 1 & 2j+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Partie IV

15) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

En réutilisant le pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

Il existe une réduite de P diagonale inférieure à coefficient diagonaux non nuls donc P est inversible

16)

→

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 761503

Né(e) le 29/06/2006 Filière : EC7

Emplacement QR Code

Code épreuve : 283 Nombre de pages : 32 Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques T.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

16) MP :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} P$$

$$M \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} MP$$

PT :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T$$

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} PT$$

$PT = 2MP \iff 2MP = PT$

$\iff MP = \frac{1}{2} PT$

$\iff M = \frac{1}{2} PTP^{-1}$

donc en posant $a = \frac{1}{2}$ on a bien $M = a PTP^{-1}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

18) (D'après q 5)

$$M^{-1} = -\frac{1}{8}(M^2 - 6I)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} M$$

$$M \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 8 & -2 & 6 \\ 6 & -4 & 8 \end{pmatrix} M^2$$

$$M^2 - 6I = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 8 & -8 & 6 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } -\frac{1}{8}(M^2 - 6I) = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 8 & -8 & 6 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

d'une part.

$$\frac{1}{a} P T^{-1} P^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} P T^{-1} P^{-1} = 2 P T^{-1} P$$

$$2P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Il existe une matrice P inversible,

$2PT^{-1}_{B}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$2P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} 2PT^{-1}$$

En terminant le pivot à la (q 15) :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) L_2 \in 2L_2 - L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \in \frac{1}{2} L_2 \\ \\ L_3 \in L_3 - L_2 \end{array}$$

donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

et $2PT^{-1}P^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$2PT^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

J'admet que $M^{-1} = \frac{1}{a} P T^{-1} P^{-1}$

19) Soit $T(n)$ la propriété : "$M^n = a^n P T^n P^{-1}$ et $(M^{-1})^n = \frac{1}{a^n} P T^{-n} P^{-1}$"

<u>Initialisation</u> : On vérifie que la propriété est vraie au rang $n = 0$,

$M^0 = I$ et $a^0 P T^0 P^{-1} = 1 P I P^{-1}$

$= P P^{-1}$

$= I$

donc $M^0 = a^0 P T^0 P^{-1}$

et $(M^{-1})^0 = I$ et $\frac{1}{a^0} P T^{-0} P^{-1}$

$= \frac{1}{1} P I P^{-1} = I$

et $(M^{-1})^0 = \frac{1}{a^0} P T^{-0} P^{-0}$

<u>La propriété est donc vraie pour $n = 0$</u>

<u>Hérédité</u> : On suppose qu'il existe un entier n pour lequel la propriété soit vraie. On démontre qu'elle est toujours vraie au rang $n+1$

$M^{n+1} = M M^n$

$M^n = a^n P T^n P^{-1}$ par H.R

donc $M^{n+1} = M(a^n P T^n P^{-1})$

et $M = a P T P^{-1}$ (d'après q 17)

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 761503

Emplacement QR Code

Code épreuve : 285 | **Nombre de pages :** 32 | **Session :** 2026

Épreuve de : Mathématiques T

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

donc $M^{n+1} = a P T P^{-1} (a^n P T^n P^{-1})$

$= a^{n+1} P T P^{-1} P T^n P^{-1}$

$$\boxed{M^{n+1} = a^{n+1} P T^{n+1} P^{-1}}$$

d'une part,

$(M^{-1})^{n+1} = (M^{-1})(M^{-1})^n$

avec par H.R, $(M^{-1})^n = \frac{1}{a^n} P T^{-n} P^{-1}$

et $M^{-1} = \frac{1}{a} P T^{-1} P^{-1}$ (d'après q 18)

et $(M^{-1})^{n+1} = \frac{1}{a} P T^{-1} P^{-1} \frac{1}{a^n} P T^{-n} P^{-1}$

$= \frac{1}{a^{n+1}} P T^{-1} P^{-1} P T^{-n} P^{-1}$

$= \frac{1}{a^{n+1}} P T^{-1} T^{-n} P^{-1}$

$$\boxed{(M^{-1})^{n+1} = \frac{1}{a^{n+1}} P T^{-n+1} P^{-1}}$$

d'autre part

La propriété est donc vraie au rang n+1

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Conclusion: D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a montré que $M^n = a^n P T^n P^{-1}$ et $(M^{-1})^n = \frac{1}{a^n} P T^{n-1} P^{-1}$.

exc 2

On achète une carte à l'aveugle par j
$\forall j \in [\![1; n]\!]$, N_j est la VA égale au nbr d'achat de carte
N_n = Collection entière

X_k est la VA égale au nbre de cartes à acheter pour passer de $k-1$ à k cartes.

Partie I :

20) $D =]\!]-1, +\infty[\![$

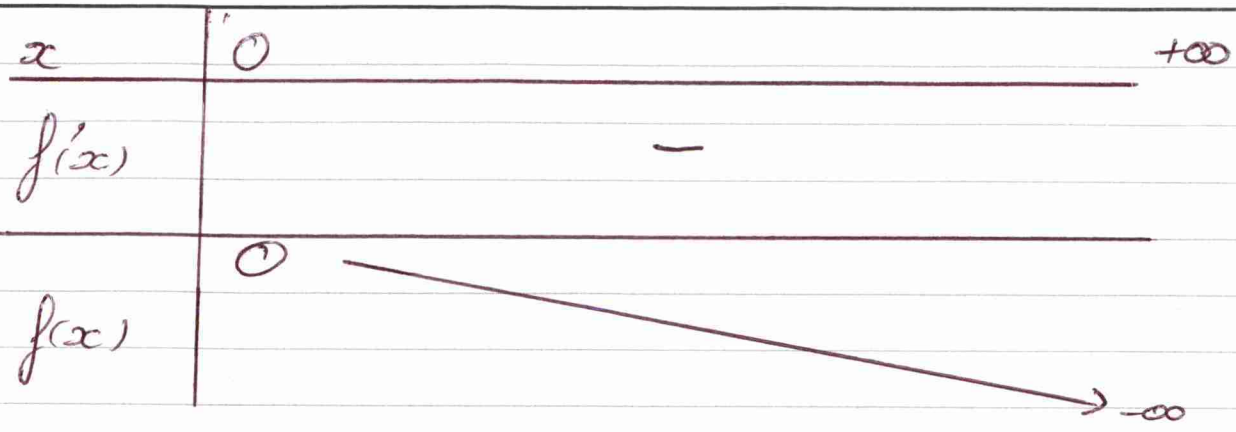
21) $f(x) = \ln(1+x) - x$

$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1$

$\frac{1}{1+x} - 1 = 0 \iff \frac{1}{1+x} = 1$

$\iff 1 = 1+x$
$\iff x = 0$

$f'(x)$ est du signe de x donc f est négative sur $]-\infty, +\infty[$



$f(0) = \ln(1+0) - 0$
$= \ln(1)$
$= 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+x) - x = -\infty$ par Croissance comparée

22) $\forall x \in D$, f est majorée par 0 et décroissante d'après le tableau de variation

donc $f(x) \leq 0$

$(=) \quad \ln(x) - x \leq 0$

$(=) \quad \underline{\ln(x) \leq x}$

23) $\forall j \in \mathbb{N}^*$,

$U_{j+1} - U_j = H_{j+1} - \ln(j+1) - H_j - \ln(j)$

$= H_{j+1} - H_j - \ln(j+1) - \ln(j)$

$= \sum_{k=1}^{j+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k} - \ln\left(\frac{j+1}{j}\right)$

$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{j} + \frac{1}{j+1}\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{j}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{j}\right)$

$= \underline{\frac{1}{j+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{j+1}\right)}$

24) $u_{j+1} - u_j = \frac{1}{j+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{j+1}\right)$

(d'après q 23)

Calculons le signe de $\frac{1}{j+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{j+1}\right)$

$\forall j \in \mathbb{N}^*$, $2 \leqslant j+1$

donc $\frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{j+1}$ et $\ln\left(1 - \frac{1}{j+1}\right) \geqslant 0$

et $\frac{1}{j+1} \geqslant 0$

donc $\frac{1}{j+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{j+1}\right) \geqslant 0$

et $u_{j+1} - u_j \geqslant 0$

$(u_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ est donc croissante

25) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $k \leqslant t \leqslant k+1$

donc $\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{t} \geqslant \frac{1}{k+1}$

par croissance et positivité de l'intégrale :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dt \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt$$

et $\frac{1}{k}(k+1-k) \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt$

Finalement, $\boxed{\frac{1}{k} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt}$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 761503

Emplacement QR Code

Code épreuve : 285 | Nombre de pages : 32 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques T

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

26) $\forall j \in \mathbb{N}^*$,

$$u_j = H_j - \ln(j)$$

~~on sait que~~ En sommant l'inégalité précédente de 1 à j, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{j} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt$$

$$\Leftrightarrow H_j \geq \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt + \int_2^3 \frac{1}{t}\,dt + \dots + \int_{j-1}^{j} \frac{1}{t}\,dt$$

$$\Leftrightarrow H_j \geq \int_1^j \frac{1}{t}\,dt$$

$$\Leftrightarrow H_j \geq \left[\ln(t)\right]_1^j$$

$$\Leftrightarrow H_j \geq \ln(j) - \ln(1)$$

$$\Leftrightarrow H_j \geq \ln(j)$$

Ainsi, $H_j - \ln(j) \geq 0$ et u_j est positive

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

27) La suite (U_j) est croissante.

~~Nous savons~~

Supposons que U_j converge vers un réel noté l

par l'unicité de la limite, $\lim_{+\infty} U_{j+1} = l$

En passant par la limite dans l'égalité :

$$U_{j+1} - U_j = \frac{1}{j+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{j+1}\right)$$

on obtient $l - l = 0$

or, $\frac{1}{j+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{j+1}\right) = 0$ ssi° $j = e$

donc $(U_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ converge vers e.

On sait d'ailleurs que $\lim_{j \to +\infty} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k}$ converge

donc il est logique que (U_j) converge

28) Si $\lim_{n \to +\infty} U_j$ converge,

alors $\lim_{n \to +\infty} H_j$ converge

et $H_j \geq \ln(j)$ donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{H_n}{\ln(n)}$ converge

vers la limite de H_n en $+\infty$ par C. C

Partie II

29) on rappelle que V_n correspond au nombre d'achat à réaliser pour avoir toute la collection tandis que X_k est la VA égale au nbr de carte a acheter pour augmenter sa collection de 1.

Ainsi, pour que la collection soit complète, il faut qu'on est obtenu n fois une nouvelle carte (puisque la colection en contient n) donc qu'on ait augmenté n fois de 1 notre collection

donc $V_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$

30) $(X_1=1)$ est forcément réalisé puisqu'au premier jour on achete une carte qu'on n'avait forcement pas.

donc X_1 suit une loi certaine

$P(X_1=1)=1$ $\quad X_1(\Omega)=1$

$E(X_1)=1$ $\quad V(X_1)=0$

31) Sachant qu'il y a n carte à possiblement collectionner et que nous n'en avons qu'1 sur les n disponibles, il y en a n-1 qu'on n'a pas.
la probabilité d'en obtenir une différente vaut donc $\frac{n-1}{n}$

32) $X_2(\Omega)=\{1,2\}$

k	1	2
$P(X_2=k)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n-1}{n}$

$$E(X_2) = 1 \times \frac{1}{n} + 2 \times \frac{n-1}{n}$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{2(n-1)}{n}$$

$$\boxed{E(X_2) = \frac{2n-1}{n}}$$

D'après la formule de König Huygens:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X_2^2) = 1^2 \times \frac{1}{n} + 2^2 \times \left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{4(n-1)}{n}$$

$$= \frac{4n-3}{n}$$

donc

$$V(X_2) = \frac{4n-3}{n} - \left(\frac{2n-1}{n}\right)^2$$

$$= \frac{4n-3}{n} - \frac{2n^2-4n+1}{n^2}$$

$$= \frac{4n^2-3n}{n^2} - \frac{2n^2-4n+1}{n^2}$$

$$\boxed{V(X_2) = \frac{2n^2+n-1}{n^2}}$$

33) $k \in [\![3, n]\!]$

On possède $k-1$ cartes donc entre 2 et $n-1$ cartes
La probabilité d'avoir une nouvelle carte vaut $\frac{n-(k-1)}{n}$, soit le nombre de carte total − notre nombre de carte sur la collection de carte

$$p_{n,k} = \frac{n-(k-1)}{n}$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 761503

Emplacement QR Code

Code épreuve : 285 | Nombre de pages : | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques T

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

34) $k \in [\![3, n]\!]$

On considère l'expérience on "achète" une carte que l'on répète n fois de manière identique et indépendante,
On considère l'evenement : " la carte obtenue est différente que la précédente, " de probabilité $\frac{n-(k-1)}{n}$

X_k est égale au nombre de réalisation de l'évenement lors des n expérience

donc ~~$X_k \nearrow B(n, \frac{n-(k-1)}{n})$~~

~~$P(X_k=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{n-k-1}{n}\right)^k \left(1-\frac{(n-k-1)}{n}\right)^{n-k}$~~

donc $X_k \nearrow$ géométrique $\left(\frac{n-(k-1)}{n}\right)$

35) $E(X_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k)$

A mon avis $\lim \frac{E(X_n)}{n \ln(n)}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Partie III

36) La clé primaire pour la table CARTES doit être l'attribut "Nom" car il associe pour chaque carte un attribut unique. les cartes seront ainsi différenciable.

37)
```
SELECT Nom
FROM CARTES;
```

38)
```
SELECT Nom
FROM POKEMON
WHERE PV >= 100;
```

39)
```
SELECT Nom
FROM CARTES
INNER JOIN POKEMON
ON CARTES.nom = POKEMON.nom
WHERE Energie = 'feu';
```

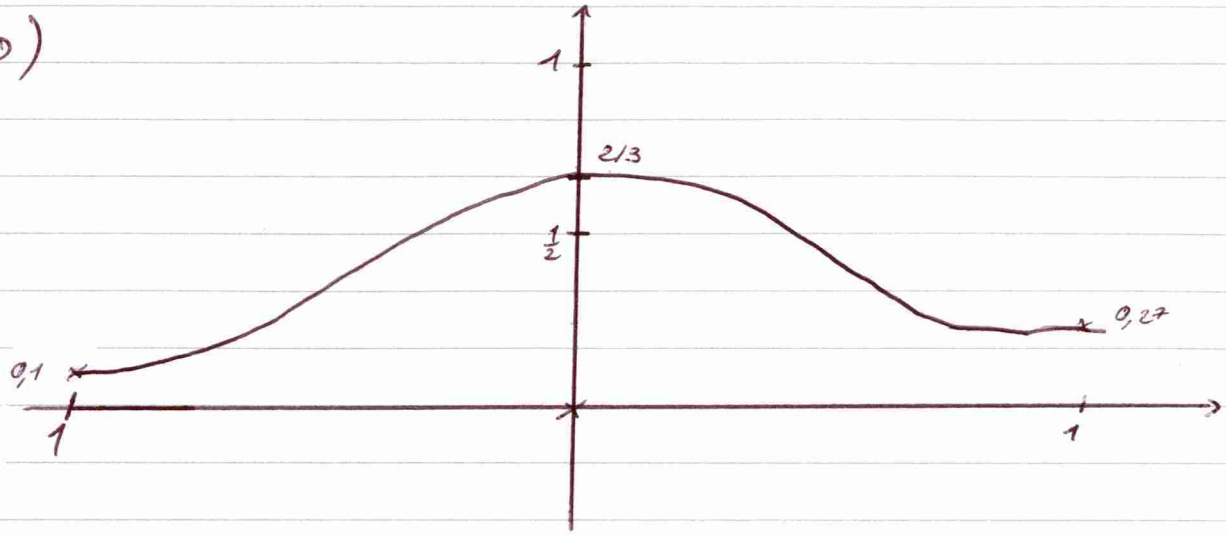
Exercice 3

Partie I

$m=0$, $M=\frac{2}{3}$, $a=1$, $b=e$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}e^{-x} & \text{si } x\geq 0\\ \frac{2}{3}e^{2x} & \text{si } x<0\end{cases}$$

40)



~~$f(-1)=\frac{2}{3}e^{-1}=\frac{2}{3}\times 0,4$~~

$f(-1)=\frac{2}{3}\times e^{(2\times -1)}$

$=$

$=\frac{2}{3}\times e^{-2}=\frac{2}{3}\times 0,4\times 0,4$

$f(0)=\frac{2}{3}\times e^{-0}$

$f(0)=\frac{2}{3}$

$=\frac{2}{3}\times 0,16$

$f(-1)=\frac{0,32}{3}\approx 0,10$

$f(1)=\frac{2}{3}\times e^{-1}=\frac{2}{3}\times 0,4=\frac{0,8}{3}\approx 0,27\approx f(1)$

~~$=\frac{20}{3}\times 4=\frac{80}{3}=\frac{40}{15}=\frac{8}{3}\approx 2,7$~~

41) ~~import numpy as np~~ ~~if return x<0~~

~~import mat~~

```
if x < 0:
    return 2/3 *(np.e **(2*x))
else:
    return 2/3 *(np.e **(-x))
B[k] = f(1000)
```

Partie II $a>0$, $b>0$, $m \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$

42) $$f(x) = \begin{cases} M e^{-a(x-m)} & \text{si } x \geqslant m \\ M e^{b(x-m)} & \text{si } x < m \end{cases}$$

• **positivité :**

si $x \geqslant m$, $x - m \geqslant 0$ et $-a(x-m) \leqslant 0$

donc $e^{-a(x-m)} \geqslant 0$

Supposons que $M \geqslant 0$

alors $M e^{-a(x-m)} \geqslant 0$

si $x < m$, $(x-m)b \leqslant 0$

et $e^{b(x-m)} \geqslant 0$

si $M \geqslant 0$ alors $M e^{-a(x-m)} \geqslant 0$

Si $M \geqslant 0$, alors f est positive sur $\mathbb{R}$

continuité : f est continue sauf éventuellement en m donc M est continue par morceaux

convergence :

d'abord, $$\int_t^m f(x)\,dx = \int_t^m M e^{b(x-m)}\,dx$$

$$= M \int_t^m e^{bx - bm}$$

$$= M \left[\frac{1}{b} e^{bx - bm} \right]_t^m$$

$$= M \times \frac{1}{b} e^{bm - bm} - M \times \frac{1}{b} e^{bt - bm}$$

$$= \frac{M}{b} - M \times \frac{1}{b} e^{bt - bm}$$

et

$\lim\limits_{t \to -\infty} bt = -\infty$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 761503

Emplacement QR Code

Code épreuve : 285 | **Nombre de pages :** 32 | **Session :** 2026

Épreuve de : Maths

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

donc par composé $\lim_{t \to -\infty} e^{bt - bm} = 0$

et $\lim_{t \to -\infty} \frac{\mu}{b} - \mu \times \frac{1}{b} e^{bt - bm} = \frac{\mu}{b}$

donc $\int_{-\infty}^{m} f(x)\,dx = \frac{\mu}{b}$

Ensuite, $\int_{m}^{t} f(x)\,dx = \int_{m}^{t} \mu e^{-a(x-m)}\,dx$

$= \mu \int_{m}^{t} e^{-ax+am}\,dx$

$= \mu \left[\frac{1}{-a} e^{-ax+am} \right]_{m}^{t}$

$= \mu x - \frac{1}{a} e^{-at+am} + \mu \times \frac{1}{a} e^{-am+am}$

$= \mu x - \frac{1}{a} e^{-at+am} + \frac{\mu}{a}$

$\lim_{t \to +\infty} e^{-at} = 0$ (pour la même raison qu'auparavant)

25/

donc $\lim_{t \to +\infty} Mx - \frac{1}{a} e^{-at+am} + \frac{M}{a} = \frac{M}{a}$

et $\int_m^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{M}{a}$

Finalement,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{m} f(x)\,dx + \int_m^{+\infty} f(x)\,dx$$

(d'après la relation de Chasles)

$$= \frac{M}{b} + \frac{M}{a}$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge donc bien.

Prouvons qu'elle vaut 1.

on a $\frac{M}{a} + \frac{M}{a} = \frac{aM + bM}{ba} = \frac{M(a+b)}{ab}$

en posant

Je ne trouve pas M.

43) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{L}(m, a, b)$

et F_X sa fonction de répartition

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

si $x < m$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} \mu e^{-a(x-m)}\,dx$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \mu \left[-\frac{1}{a} e^{-a(x-m)} \right]_t^x$$

$$\mu \left[\frac{1}{a} \right] = \lim_{t \to -\infty} \mu x - \frac{1}{a} e^{-ax+am} + \frac{\mu}{a} e^{-at+am}$$

$$= -\frac{\mu}{a} e^{-ax+am}$$

si $x < m$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) = \int_{-\infty}^{x} \mu e^{k(x-m)}\,dx$$

$$\text{or, } \int_t^x \mu e^{k(x-m)}\,dx$$

$$= \mu \left[\frac{1}{k} e^{k(x-m)} \right]_t^x$$

$$= \frac{\mu}{k} e^{k(x-m)} - \frac{\mu}{k} e^{k-t-m}$$

$$\text{et } \lim_{t \to -\infty} \int_t^x \mu e^{k(x-m)} = \frac{\mu}{k} e^{k(x-m)}$$

si $x \geq m$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{m} f(x)\,dx + \int_m^x f(x)\,dx$$

$$= \frac{\mu}{k} + \frac{\mu}{a} - \frac{\mu}{a} e^{-at+am}$$

44)

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{a}{a+b} e^{b(x-m)} & \text{si } x < m \\ 1 - \frac{b}{a+b} e^{-a(x-m)} & \text{si } x \geq m \end{cases}$$

- $P(-X \leq x)$

$= P(X \geq -x)$

$= 1 - P(X \leq -x)$

$= \underline{1 - F(-x)}$

donc

$$F_{-X}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{a}{a+b} e^{b(-x-m)} & \text{si } -x > m \\ 1 - 1 - \frac{b}{a+b} e^{-a(-x-m)} & \text{si } -x \geq m \end{cases}$$

Soit

$$\underline{F_{-X}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{a}{a+b} e^{b(-x-m)} & \text{si } x < m \\ - \frac{b}{a+b} e^{-a(-x-m)} & \text{si } x \leq m \end{cases}}$$

45) $-X \nearrow \mathcal{L}(-m, -a, -b)$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 761503

Emplacement QR Code

Code épreuve : 285	Nombre de pages : 32	Session : 2026

Épreuve de : Maths

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Partie III

$a=b$, $X \hookrightarrow \mathcal{L}(m,a,a)$ $m \in \mathbb{R}$

$Y = |X-m|$

4.7) si $y \geq 0$ $F_Y(x) = P(Y \leq y)$

⚠ inversion

$= P(|X-m| \leq y)$

$= P(-y \leq X-m \leq y)$

$= P(-y+m \leq X \leq y+m)$

$= \underline{F(y+m) - F(-y+m)}$

4.6) ⚠ (j'ai inversé) $\forall y < 0$ $F_Y(x) = P(Y \leq y)$

$= P(|X-m| \leq y)$

Or, une valeur absolue ne peut être négative donc $\forall y < 0$, $\underline{P(|X-m| \leq y) = 0}$

48) $F_X(y+m) - F_X(-y+m)$

$= 1 - \frac{b}{a+b} \cdot e^{-a(y+m-m)} - \left(1 - \frac{b}{a+b} e^{-a(-y+m-m)}\right)$

$= 1 - \frac{b}{a+b} e^{-ay} - 1 + \frac{b}{a+b} e^{ya}$

$= 1 - 1 + \frac{b e^{ya}}{a+b} - \frac{b e^{-ay}}{a+b}$

$= \frac{b e^{ya} - b e^{-ay}}{a+b}$

$= \frac{b(e^{ya} - e^{-ay})}{a+b} =$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < m \\ \frac{b(e^{y-a} - e^{-ay})}{a+b} & \text{si } x \geq m \end{cases}$$

Je ne reconnais pas la loi de Y

49) $P(X > m) = 1 - P(X \leq x)$

$= \underline{1 - F_X(x)}$

$$P(X > m) = \begin{cases} 1 - \frac{a}{a+b} e^{b(x-m)} & \text{si } x < m \\ - \frac{b}{a+b} e^{-a(x-m)} & \text{si } x \geq m \end{cases}$$

50) /

Partie IV

$X \nearrow \mathcal{L}(m, ab)$

51) Sur $]-\infty, m[$ F' est strictement croissante car $e^{b(x-m)} \geqslant 0$ et $\frac{a}{a+b} \geqslant 0$

donc $\frac{a}{a+b} e^{b(x-m)} \geqslant 0$

F est continue sur $]0, \frac{a}{a+b}[$

donc F réalise une bijection

52) /

53) Soit $U \nearrow \mathcal{U}\,]0,1[$

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

54) si $t < m$,

$P(T \leqslant t) =$

55) $P(T \leq t) = P(U \leq F_X(t))$

et $P(T > t) = P(U > F_X(t))$

donc T et $U \nearrow U([0,1])$

et $F_T = F_X$

56)

```
U = rd.random()
if On
        X =
else
        X =
```

Partie V

56) $S \nearrow$ exponentielle de paramètre λ

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

par définition, $E(S) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(S) = \frac{1}{\lambda^2}$

donc $\int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda}$ et $\int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} =$

Fin

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094