Copie anonyme - n°anonymat : 329558

P2-00157 329558 Mat Appli

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 35	Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Appliquées.

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1

1)

```
def suite_u(a, n):
    u = a
    for k in range(1, n+1):
        u = u**2 - u + 1
    return u
```

2) Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Posons f une fonction définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

Puisque f est continue et que u_n converge, notons l sa limite, on peut alors passer à la limite dans la relation de récurrence :

$$f(l) = l \iff l^2 - l + 1 = l$$

$$\iff l^2 - 2l + 1 = 0$$

Ce trinôme a pour discriminant : $(-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4 - 4 = 0$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc la seul solution est $\frac{-(-2)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Ainsi si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge sa limite est $l = 1$.

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + 1 - u_n$

$= u_n^2 - 2u_n + 1$

D'après la question precedente ce trinome possede une unique racine, son discriminant est nul et on a donc que $u_n^2 - 2u_n + 1 \geq 0$

Donc $u_{n+1} \geq u_n$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ puisque u_n est croissante on a alors,

$u_n \geq u_0$ et $u_n \geq a$

c) Supposons par l'absurde que u_n converge.

Alors d'après 2 u_n converge et sa limite est $l = 1$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante alors $u_n \leq 1$

or d'après 5b $u_n \geq a > 1$

d'où la contradiction.

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente et comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

4) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = +\infty$

Ainsi la proposition 3 et 4 ne sont pas bonne car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0 \neq \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$

Et $u_n^2 - u_n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^2$

Donc $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^2$ (proposition 2)

5)a) Soit $n\in\mathbb{N}$ $\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+2} - 1}$ existe si et seulement si

$u_n - 1 \neq 0$ et $u_{n+1} - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow u_n \neq 1$ et $u_{n+1} \neq 1$

On d'après 3b $u_n \geq a > 1$

Donc $u_n \neq 1$ et ainsi $u_{n+1} \neq 1$ car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{u_n - 1} - \dfrac{1}{u_{n+1} - 1}$ existe

$$\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{u_{n+1} - 1 - u_n + 1}{(u_n - 1)(u_{n+1} - 1)}$$

$$= \frac{u_n^2 - u_n + 1 - u_n}{(u_n - 1)(u_n^2 - u_n)}$$

$$= \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n (u_n - 1)^2}$$

$$= \frac{(u_n - 1)^2}{u_n (u_n - 1)^2} = \frac{1}{u_n}$$

D'où $\dfrac{1}{u_n - 1} - \dfrac{1}{u_{n+1} - 1} = \dfrac{1}{u_n}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$$

$$= \frac{1}{u_0 - 1} - \frac{1}{u_1 - 1} + \frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_2 - 1} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{u_{n-1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} + \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$$

(par télescopage)

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 329558

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 35	Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Appliquées.

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$$= \frac{1}{u_0 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$$

$$= \frac{1}{a-1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$$

c) La série de terme général $\frac{1}{u_n}$ converge si et seulement si la limite de la somme partielle est finie.

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{a-1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{a-1}$$

Donc $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{u_n}$ converge et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{a-1}$$

6) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $P(X=n) = \frac{1}{u_n}$

or $\frac{1}{u_n} \in [0;1]$ car $u_n \geq a \geq 1$ d'après 3b

De plus $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{2-1} = 1$

Donc en posant $P(X=n) = \frac{1}{u_n}$ on définit bien la loi X

b) Soit $n \geq 2$ on a :

$(2^n - 1) \geq 2$

et $2^n(2^n-1) \geq 2^n \times 2$

et $2^n(2^n-1) \geq 2^{n+1}$

et $2^n(2^n-1)+1 \geq 2^{n+1}$

$\forall n \geq 2$

c) Montrons par récurrence que : $u_n \geq 2^n$

initialisation

$u_1 = u_0^2 - u_0 + 1 = 2^2 - 2 + 1$

$= 4 - 2 + 1 = 3$

$u_2 = 3^2 - 3 + 1$

$= 9 - 3 + 1$

$= 7 \geqslant 2^2 = 4$

<u>hérédité</u> Soit $n \geq 2$ tel que $u_n \geqslant 2^n$

Montrons que $u_{n+1} \geqslant 2^{n+1}$

~~par hypothèse de récurrence~~

$u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$

or $u_n \geqslant 2^n$ donc $u_n^2 \geqslant (2^n)^2$

et $u_n^2 - u_n + 1 \geqslant (2^n)^2 - 2^n + 1$

$u_n^2 - u_n + 1 \geqslant 2^n(2^n - 1) + 1$

or d'après <u>6b</u> $2^n(2^n - 1) + 1 \geqslant 2^{n+2}$

D'où $u_{n+1} \geqslant 2^{n+1}$

Ainsi par le principe de récurrence <u>$u_n \geqslant 2^n \ \forall n \geq 2$</u>

$u_0 = 2 \geqslant 2^0 = 1$ (vraie pour $n=0$)

$u_1 = 3 \geqslant 2^1 = 2$ (vraie pour $n=1$)

d) X possède une espérance si et seulement si

$\sum_{n\geq 0} nP(X=n)$ converge.

or $nP(X=n) = \frac{n}{u_n}$

et $u_n \geq 2^n$ donc $\frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2^n}$ par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$

et $\frac{n}{u_n} \leq \frac{n}{2^n}$

or $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{2^n} = \sum_{n\geq 0} n\left[\frac{1}{2}\right]^n$ est une série géométrique dérivée à un terme près qui converge.

Puisque les deux séries sont à termes positifs alors par majoration

$\sum_{n\geq 0} \frac{n}{u_n} = \sum_{n\geq 0} nP(X=n)$ converge et X admet bien une espérance.

X possède une variance si et seulement si X possède un moment d'ordre 2 si et seulement si

$\sum_{n\geq 0} n^2 P(X=n)$ converge.

or $n^2 P(X=n) = \frac{n^2}{u_n}$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 329558

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 35 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

et $\frac{1}{u_n} \leqslant \frac{1}{2^n}$ et $\frac{n^2}{u_n} \leqslant \frac{n^2}{2^n}$

(par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$)

or $n^2 \times \frac{n^2}{2^n} = \frac{n^4}{2^n}$

et $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4}{2^n} = 0$ par croissance comparées

Donc $\frac{n^2}{2^n} = \underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

or $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann de paramètre $2>1$)

Donc puisque les series sont a termes positifs on a:

$\frac{n^2}{u_n} \leqslant \frac{n^2}{2^n}$

or $\frac{n^2}{2^n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc par négligeabilité

$\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2}{2^n}$ converge

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Par majoration $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{a_n}$ converge

Ainsi X admet un moment d'ordre 2 et donc une variance

Exercice 2

1) a) on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ g'(x) = 2f(x) + 5g(x) \end{cases}$

telles que $f(0) = 1$ et $g(0) = 1$

Donc le principe de Cauchy nous dit que ce problème possède un seul couple (f, g) solution.

b) f et g sont dérivables par définition.

De plus $f'(x) = f(x) - 2g(x)$

$g'(x) = 2f(x) + 5g(x)$

Donc f' et g' sont dérivables comme somme de fonctions dérivables

Ainsi f et g sont 2 fois dérivables.

2) $f''(x) = f'(x) - 2g'(x)$ et $f(x) = f'(x) + 2g(x)$

Donc $f''(x) - 6f'(x) + 9f(x)$

$= f'(x) - 2g'(x) - 6\left(f(x) - 2g(x)\right) + 9\left(f'(x) + 2g(x)\right)$

$= f'(x) - 2g'(x) - 6f(x) + 12g(x) + 9f'(x) + 18g(x)$

$= 10f'(x) - 6f(x) + 30g(x) - 2g'(x)$

$= 10f(x) - 20g(x) - 6f(x) + 30g(x) - 4f(x) - 10g(x)$

$= 0$

Ainsi f est bien solution de (E) : $y'' - 6y' + 9y = 0$

b) $f'(0) = f(0) - 2g(0)$

$f'(0) = 1 - 2 \times 2$

$f'(0) = -2$

c) f est solution de (E) donc résolvons (E)

(E) : $y'' - 6y' + 9y = 0$

L'équation caractéristique est :

$x^2 - 6x + 9 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow x = 3$ (unique solution)

Donc $f(x) = (\lambda + \alpha x)\, e^{3x}$

et $f(0) = 2$
$f'(0) = -1$

donc $\begin{cases} (\lambda + \alpha \times 0)\, e^{3\times 0} = 2 \\ \cancel{f(0) - 2g(0) = -1} \\ 3\lambda e^{3\times 0} + \alpha e^{3\times 0} + \alpha \times 0 \times 3 e^{3x} = -2 \end{cases}$

donc $\begin{cases} \lambda = 2 \\ 3\lambda + \alpha = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \alpha = -8 \end{cases}$

Ainsi $\underline{f(x) = (2 - 8x)\, e^{3x} \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

d) Déterminons les solutions de $g'(x) = 2f(x) + 5g(x)$

$\{x \mapsto \gamma e^{5x} ; \gamma \in \mathbb{R}\}$ est solution de l'équation homogène associée.

~~$g(0) = 2$ donc $\gamma e^{5\times 0} = 2 \Leftrightarrow \gamma = 2$~~

Par le principe de superposition on a

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = ?x(2-8x)\, e^{3x} + \gamma e^{5x}$

et $g(0) = 1$ donc $2 \times (2-0)\, e^{0} + \gamma e^{0} = 1$
et $\gamma + 2 = 1$ et $\gamma = -1$

Donc $\underline{\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = (2 - 8x)\, e^{3x} - e^{5x}}$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 329558

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 35 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Appliquées

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite).*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

3) a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ g'(x) = 2f(x) + 5g(x) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ f'(x) + g'(x) = 3f(x) + 3g(x) \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ h'(x) = 3(f(x) + g(x)) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ h'(x) = 3h(x) \end{cases}$ $\Leftrightarrow (S)$

b) $h(0) = f(0) + g(0) = 1 + 1 = 2$

$h' = 3h$ a pour ensemble de solutions :

$\{ x \mapsto \alpha e^{3x} ; \alpha \in \mathbb{R} \}$

De plus $h(0) = 2$

donc $\alpha e^{3\times 0} = 2$

et $\alpha = 2$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = 2e^{3x}$

c) Soit $(S) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ h'(x) = 3h(x) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(x) = f(x) - 2h(x) + 2f(x) \\ h(x) = 2e^{3x} \end{cases}$

car $h(x) = f(x) + g(x)$

et $g(x) = h(x) - f(x)$.

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(x) = 3f(x) - 2h(x) \\ h(x) = 2e^{3x} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(x) = 3f(x) - 4e^{3x} \\ (f+g)(x) = 2e^{3x} \end{cases}$

4) a) f_a est définie dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonction dérivables avec :

$$f_a'(x) = a e^{3x} + a x \times 3 e^{3x}$$

$$= a e^{3x} + 3a x e^{3x}$$

Ensuite $3ax e^{3x} - 4 e^{3x} = a e^{3x} + 3a x e^{3x}$

$\Leftrightarrow f_a$ est solution particulière de (ED).

et $a e^{3x} = -4 e^{3x}$ et $a = -4$

Ainsi $f_{-4}(x) = -4x e^{3x}$ est solution particulière de (ED)

b) $f_{-4}(x)$ est solution particulière de (ED)

déterminons la solution du système homogène associée a (ED)

$y' = 3y$ les solutions sont $\{ x \mapsto \lambda e^{3x}, \lambda \in \mathbb{R} \}$

Ainsi les solutions de $f'(x) = 3f(x) - 4 e^{3x}$ sont :

$\{ x \mapsto \lambda e^{3x} - 4x e^{3x}, \lambda \in \mathbb{R} \}$

et $f(0) = 7$ donc $\lambda e^0 - 4 \times 0 e^0 = 7$

et $\lambda = 7$

Finalement $f(x) = e^{3x} - 4xe^{3x}$

$= e^{3x}(1-4x)$

c) ~~On a $g(x) = h(x) - f(x)$~~

~~et $g(x) = 2e^{3x} - e^{3x}(1-4x)$~~

On a $g(x) = h(x) - f(x)$

$= 2e^{3x} - e^{3x}(1-4x)$

$= e^{3x}(2 - 1 + 4x)$

$= e^{3x}(1+4x)$

Les fonctions f et g recherchées sont :

$\underline{f(x) = e^{3x}(1-4x)}$ et $\underline{g(x) = e^{3x}(1+4x)}$

(étrange car les fonctions g que je trouve sont différentes entre 2d et 4c)

5) a)

```
def f(x):
    y = np.exp(3*x)*(1-4*x)
    return y
```


IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 329558

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 35	Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Appliquées

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

```
def g(x):
    y = np.exp(3*x) * (1+4*x)
    return y
```

b)

```
def tracé(x):
    y1 = np.exp(3*x) * (1-4*x)
    y2 = np.exp(3*x) * (1+4*x)
    return y1, y2
x = np.linspace(-1/2, 1/2, 100)
y1 = plt.plot(x, y1)
plt.show()
y2 = plt.plot(x, y2)
plt.show()
```

Exercice 3

1) a) $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{\theta} & \text{si } x \in [0;\theta] \\ 1 & \text{si } x \geq \theta \end{cases}$$

b) $$E(X) = \frac{\theta}{2}$$

$$V(X) = \frac{(\theta+1)^2 - 1}{12}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2) a)

$$F_n(x) = P(Y_n \leq x)$$

$$= P(\max(X_1, \dots X_n) \leq x)$$

$$= P((X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x) \cap \dots \cap (X_n \leq x))$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x) \quad \text{par indépendance de } (X_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} F(x) = F(x)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^n & \text{si } x \in [0;\theta] \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}$$

b) F_n est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ comme quotient et composée de fonctions $\mathcal{C}^1$ donc F_n est continue donc :

Y_n est une variable à densité.

$$f_n(x) = F_n'(x) = \begin{cases} \frac{n}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} & \text{si } x \in [0;\theta] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3) a) Si U suit une loi uniforme sur $[0;1]$ alors par transformation affine θU suit une loi uniforme sur $[0;\theta]$

3)b)

```
def var_Y(theta, n):
    X = theta * rd.random(n)
    Y = max(X)
    return Y
```

4)a) Y_n possède une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{Y_n}(x)\,dx$ converge.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x)\,dx = \int_0^\theta x \frac{n}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} dx$$

$$= \int_0^\theta n\left(\frac{x}{\theta}\right)^n dx$$

$$= n\left[\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n+1} \times \theta\right]_0^\theta$$

$$= n\frac{1}{n+1}\left(\frac{\theta}{\theta}\right)^{n+1} \times \theta - n\frac{1}{n+1}\left(\frac{0}{\theta}\right)^{n+1} \times \theta$$

$$= \frac{n\theta}{n+1}$$

Donc Y_n possède une espérance et on a $\underline{E(Y_n) = \frac{n\theta}{n+1}}$

b) Y_n possède une variance si et seulement si Y_n possède un moment d'ordre 2 donc si $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_n(x)\,dx$ converge

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_n(x)\,dx = \int_0^\theta x^2 \frac{n}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} dx$$

$$= \int_0^\theta n x \left(\frac{x}{\theta}\right)^n dx$$

Posons $u(x) = nx$ $\quad u'(x) = n$

$v'(x) = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n$ $\quad v(x) = \frac{\theta}{n+1}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n+1}$

Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ donc par intégration par parties on a :

$$\int_0^\theta x^2 f_n(x)\,dx = \left[nx\frac{\theta}{n+1}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n+1}\right]_0^\theta - \int_0^\theta \frac{n\theta}{n+1}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n+1} dx$$

$$= \frac{n\theta^2}{n+1} - \frac{n\theta}{n+1}\int_0^\theta \left(\frac{x}{\theta}\right)^{n+1} dx$$

$$= \frac{n\theta^2}{n+1} - \frac{n\theta}{n+1}\left[\frac{\theta}{n+2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n+2}\right]_0^\theta$$

$$= \frac{n\theta^2}{n+1} - \frac{n\theta^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{(n+2)n\theta^2 - n\theta^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2\theta^2 + 2n\theta^2 - n\theta^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2\theta^2 + n\theta^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)\,n\theta^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 329558

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 35 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc Y_n possède une variance et on a :

$$V(Y_n) = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$$

5) a) $E(Z_n) = E\left(\frac{n+1}{n} Y_n\right)$

$= \frac{n+1}{n} E(Y_n)$ par linéarité

$= \frac{n+1}{n} \times \frac{n\theta}{n+1} = \theta$

Donc Z_n est un estimateur de θ et $E(Z_n) = \theta$

b) $V(Z_n) = V\left(\frac{n+1}{n} Y_n\right)$

$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 V(Y_n)$

$= \frac{(n+1)^2}{n^2} \times \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$

$= \frac{\theta^2}{(n+2)n}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

6) a) Pour $n = 1$ on a $\frac{\theta^2}{5} \geq 1$ car $\theta \in [5;7]$
$\theta^2 \in [25;49]$

pour $n = 2$ on a $\frac{\theta^2}{4} \geq 1$ car $\theta \in [5;7]$
$\theta^2 \in [25;49]$

⋮

pour $n = 46$ on a $\frac{\theta^2}{48}$ qui n'est pas forcement plus petit que 1 car
$\theta^2 \in [25;49]$

et pour tout $n \geq 47$ on a $\frac{\theta^2}{n+2} \leq 1$ car $\theta^2 \in [25;49]$
et $n+2 \in [\![49; +\infty[\![$

b) L'inégalité de Bienaymé Tchebychev appliquée à Z_n est :

$$P(|Z_n - E(Z_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Z_n)}{\varepsilon^2} \quad \text{avec } \varepsilon > 0$$

et $$P(|Z_n - \theta| \geq \varepsilon) \leq \frac{\theta^2}{n(n+2)\varepsilon^2} \quad \text{avec } \varepsilon > 0$$

et $$P(|Z_n - \theta| \leq \varepsilon) = 1 - P(|Z_n - \theta| \geq \varepsilon)$$

Donc $\quad -P(|Z_n-\theta| \geqslant \varepsilon) \geqslant -\dfrac{\theta^2}{n(n+2)\varepsilon^2}$

et $\quad 1-P(|Z_n-\theta| \geqslant \varepsilon) \geqslant 1-\dfrac{\theta^2}{n(n+2)\varepsilon^2}$

et $\quad P(|Z_n-\theta| \leqslant \varepsilon) \geqslant 1-\dfrac{\theta^2}{n(n+2)\varepsilon^2}$

or pour $n \geqslant 47$, $\dfrac{\theta^2}{n+2} \leqslant 1$

donc $\dfrac{\theta^2}{n(n+2)} \leqslant \dfrac{1}{n}$

et $\dfrac{\theta^2}{n(n+2)\varepsilon^2} \leqslant \dfrac{1}{n\varepsilon^2}$

donc $-\dfrac{\theta^2}{n(n+2)\varepsilon^2} \geqslant -\dfrac{1}{n\varepsilon^2}$

et $1-\dfrac{\theta^2}{n(n+2)\varepsilon^2} \geqslant 1-\dfrac{1}{n\varepsilon^2}$

Ainsi pour tout $n \geqslant 47$ et $\varepsilon > 0$

$$\underline{P(|Z_n-\theta| \leqslant \varepsilon) \geqslant 1-\frac{1}{n\varepsilon^2}}$$

c) $P\left(|Z_n-\theta| \leqslant \frac{1}{10}\right) \geqslant 1-\dfrac{1}{n\frac{1}{100}}$

et $P\left(-\frac{1}{10} \leqslant Z_n-\theta \leqslant \frac{1}{10}\right) \geqslant 1-\dfrac{1}{\frac{n}{100}}$

et $P\left(-Z_n - \frac{1}{10} \leq -\theta \leq -Z_n + \frac{1}{10}\right) \geq 1 - \frac{100}{n}$

et $P\left(Z_n - \frac{1}{10} \leq \theta \leq Z_n + \frac{1}{10}\right) \geq 1 - \frac{100}{n}$

et $P\left(\theta \in \left[Z_n - \frac{1}{10}, Z_n + \frac{1}{10}\right]\right) \geq 1 - \frac{100}{n}$

Déterminons n pour que $1 - \frac{100}{n} = 0,95$

il faut que $\frac{100}{n} = 0,05$ donc $n = 2000$

Ainsi si n est supérieur ou égal à 2000, l'intervalle $\left[Z_n - \frac{1}{10} ; Z_n + \frac{1}{10}\right]$ est un intervalle de confiance pour θ avec un niveau de confiance au moins égal à 0,95.

7) Ce code définit une variable c qui compte le nombre de fois (sur 1000 repetitions) où le paramètre θ est dans l'intervalle de confiance.

la commande print(mystère(6)) renvoie ~~une moyenne sur 100 repetition~~ la probabilité sur 1000 repetitions que 6 soit dans l'intervalle de confiance de la question 6c

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 329558

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Appliquées.

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Problème

Partie I

$P(x) = x^2 - nx$ est polynome annulateur de J_n

si et seulement si $J_n^2 - n J_n = 0$

Or $J_n^2 = n J_n$ car J_n est la matrice avec que des 1 de taille n donc $J_n^2 = n J_n$.

D'où $J_n^2 - n J_n = 0$

Ainsi $P(x) = x^2 - nx$ est bien polynome annulateur de J_n

b) J_n est diagonalisable car J_n est symétrique.

Supposons par l'absurde que J_n ne possède pas 2 valeurs propres.

Alors puisque J_n est diagonalisable J_n possède 3 valeurs propres maximum. (mais pas 2).

Les valeurs propres sont parmi les solutions de $P(x)=0$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$P(x) = 0 \iff x^2 - nx = 0$

$\iff x(x-n) = 0 \iff x = 0$ ou $x = n$.

Puisque J_n ne possède pas deux valeurs propres alors l'une des deux valeurs propres possibles trouvées n'est pas valeur propre.

On a clairement $\operatorname{rg}(J_n) = 1$ car J_n possède n colonne de 2. Ainsi 0 est valeur propre.

Or si 0 est l'unique valeur propre de J_n alors il existe $D = 0_n$ et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que d'après la formule de changement de base

$J_n = PDP^{-1}$ et $J_n = P0_nP^{-1}$

et $J_n = 0_n$ (contradiction)

Ainsi 0 n'est pas l'unique valeur propre et on a donc que

$\operatorname{sp}(J_n) = \{0; n\}$

c) $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$J_n X = nX \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_1 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_2 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_n \end{cases}$$

En soustrayant toute les lignes entre elles on a :

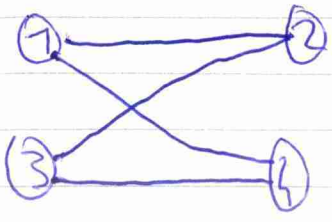
$$J_n X = nX \iff \begin{cases} x_1 + \cdots + x_n = x_1 \\ 0 = x_2 - x_1 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \vdots \\ 0 = x_n - x_1 \quad L_n \leftarrow L_n - L_1 \end{cases}$$

$$J_n X = nX \iff \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_3 = x_1 \\ \vdots \\ x_n = x_1 \end{cases}$$

d) $J_n X = nX \iff \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_3 = x_1 \\ \vdots \\ x_n = x_1 \end{cases}$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Ainsi $\dim \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 1$

Partie 2



G_4 graphe est bien un élément de $E_4(2)$ car c'est un graphe d'ordre 4 (4 sommets), de degré maximum 2 et de diamètre 2.

b) G_4 n'est pas un graphe element de $E_5(2)$ car pour rejoindre le sommet ③ à ⑤ il y a besoin d'utiliser 4 arêtes donc $D=2$ n'est pas verifiée.

G_2 n'est pas un graphe élement de $E_5(2)$ car le degrés du sommet 2 vaut $5 \geq 2$

Par elimination ce sont les graphes G_1 et G_3

En effet G_1 et G_3 verifie les 3 conditions :

- graphe d'ordre 5
- de diamètre 2
- de degrés maximal 2

3) a) G un graphe de $E_n(d)$. En prenant s un sommet on a que le nombre de voisins maximum de s est d (car degrés de s est maximum d)

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 329558

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 35 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Appliquées.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

b)

c) n est au maximum égal à $d + d(d-1)$

donc $n \leqslant d + d(d-1)$

et $n \leqslant d + d^2 - d$

et $n \leqslant d^2$

et $n \leqslant d^2 + 1$ en rajoutant le sommet s on par le fait que $d^2 \leqslant d^2+1$

Partie 3

4) A est symétrique car le graphe est connexe

5)a) $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$ on a $a_{i,j} \in \{0;1\}$ car chaque sommet est soit relié ou non relié à un autre sommet.

b) $a_{i,i} = 0$ car le sommet i n'est pas relié à lui même (car $i \in [\![1;n]\!]$), aucun sommet n'est relié à lui même.

6) a) On a $B = A^2$ donc

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, a_{j,k}$$ car $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

b) Soit $i \in [\![1;n]\!]$

~~$b_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, a_{i,k}$~~

$b_{i,i}$ est le nombre de chaines de longueur 2 qui relie le sommet i à lui même.

Cela correspond

$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}$ est le degré du sommet i qui vaut d

Donc $b_{i,i} = d$

7)a) Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ avec $i \neq j$

Si $a_{i,j} = 0$ alors $b_{i,j} = 1$ car chaque sommet est relié à un autre par exactement une chaîne de longueur 1 ou 2.

Si $a_{i,j} = 1$ alors $b_{i,j} = 0$. Par le même principe

Si la longueur est 1 alors $a_{i,j} = 1$ et $b_{i,j} = 0$

Si la longueur est 2 alors $a_{i,j} = 0$ et $b_{i,j} = 1$

Donc $\begin{cases} a_{i,j} = 0 \\ b_{i,j} = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a_{i,j} = 1 \\ b_{i,j} = 0 \end{cases}$

b) Ainsi $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ $\underline{b_{i,j} + a_{i,j} = 1}$

avec $i \neq j$

car soit $a_{i,j} = 0$ et $b_{i,j} = 1$ soit $a_{i,j} = 1$ et $b_{i,j} = 0$

c) On a $a_{i,i} = 0$ et $b_{i,i} = 0$ d'après 5b et 6b

Donc $\underline{b_{i,i} + a_{i,i} = 0}$

8)

Partie 4

9) D'après 4 A est symétrique donc diagonalisable

10) a)

b) Car a $AU = dU$ avec $U \neq 0_n$ donc d est bien valeur propre de A

11) a)

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 329558

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 **Nombre de pages :** 35 **Session :** 2026

Épreuve de : Mathématiques Appliquées

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

b) Si $\lambda = d$ on a :

$J_n X = (\lambda^2 + d - \lambda + 1) X$

$\Leftrightarrow J_n X = (\lambda^2 + 1) X$

$\Leftrightarrow \dots$

D'où $X \in Vect(U)$

Puisque $X \in Vect(U)$ alors le sous espace propre associé à $\lambda = d$ est de dimension 1

c) $\lambda^2 + \lambda - d + 1 = n$

$\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - d + 1 = d^2 + 1$

$\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda = d^2 + d$

$\Leftrightarrow \lambda = d$

L'unique solution est bien la valeur propre de A qui est d.

d) Si $\lambda \neq d$ on a $\lambda^2 + \lambda - d + 1 = 0$ car 0 est la deuxième valeur propre de J_n.

En effet $J_n X = (\lambda^2 + \lambda - d + 1) X$ avec $\lambda^2 + \lambda - d + 1 = 0$ comme 0 est la deuxième valeur propre de J_n et que $d \neq 0$.

e) On résout $\lambda^2 + \lambda - d + 1 = 0$

$$\Delta = (1-d)^2 - 4 \times 1 \times 1$$
$$= 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot d + d^2 - 4$$

On admets que le discriminant est positif et on a:

$b = \frac{-1 - \sqrt{\quad}}{}$

non abouti

Partie 5

12) a) De matrices de même format c'est à dire semblables on a:

$$Tr(MN) = Tr(NM)$$

b)

13) Le sous espace propre de A associé au la valeur propre λ est de dimension 1 donc λ apparait qu'une fois dans la matrice D son Dest la matrice contenant les valeurs propres de A d'après la formule de changement de base.

d'après 11b

15) c) $\lambda - 2 = \lambda\sqrt{4\lambda - 3}$

$(\lambda - 2)^2 = \lambda^2(4\lambda - 3)$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 4\lambda^3 - 3\lambda^2$

et $4\lambda^3 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

et $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751