Banque «Agro-Véto»
A - 0416

MATHÉMATIQUES

Méthodes de calcul et raisonnement
Durée : 2 heures 30 minutes

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et éventuellement remplacera le sujet.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice : Développement asymptotique d'une suite

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}.$$

1. Étude de la nature de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (a) Dresser le tableau de variations de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$.
   (b) En déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 4, on a :
   $$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$
   (c) En déduire l'existence de trois constantes réelles positives A, B et C telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, on ait :
   $$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - A \leq S_n - B \leq \frac{\ln^2(n)}{2} - C.$$
   (d) En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Recherche d'un équivalent de S_n.
   (a) Montrer que $\ln^2(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln^2(n)$.
   (b) En déduire que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln^2(n)}{2}$.

3. Étude asymptotique de la suite u définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = S_n - \frac{\ln^2(n)}{2}.$$

   (a) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

   (b) En déduire que la suite u converge.

   Dans la suite de l'exercice, la limite de la suite u sera notée ℓ.

4. Une application.

   On considère la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k}$.

   (a) Prouver que pour tout entier naturel non nul n, on a

$$A_{2n} = S_{2n} - S_n - \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

   (b) On admet qu'il existe un réel γ tel que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

   En déduire que la suite $(A_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite en fonction de γ.

   (c) En déduire que la suite $(A_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite en fonction de γ.

   (d) Que peut-on en déduire au sujet de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Problème : Les matrices pseudo-inversibles

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul.

Partie I : Définition, premières propriétés

Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
La matrice A est dite **pseudo-inversible** s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$(1) \quad \begin{cases} AB = BA \\ ABA = A \\ BAB = B \end{cases}$$

On dit alors que B est une **pseudo-inverse** de A.

1. Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pseudo-inversible ainsi que B_1 et B_2 deux pseudo-inverses de A.

   (a) En calculant AB_1AB_2 de deux façons différentes, montrer que $AB_2 = AB_1$.

   (b) En déduire que $B_1 = B_2$.

   Ainsi la matrice A admet un unique pseudo-inverse appelé la pseudo-inverse de A et notée A^*.

2. Quelques exemples

(a) Montrer que la matrice nulle d'ordre n est pseudo-inversible et déterminer sa pseudo-inverse.

(b) Montrer que toute matrice M inversible d'ordre n à coefficients réels est pseudo-inversible et déterminer sa pseudo-inverse.

(c) Soit N une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pseudo-inversible. On suppose que N est nilpotente c'est-à-dire qu'il existe un entier p non nul tel que N^p soit la matrice nulle et que N^{p-1} soit non nulle.

i. Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a

$$N^*N^k = N^{k-1}.$$

ii. En déduire que N est la matrice nulle, c'est-à-dire que $p = 1$.

iii. Que peut-on en déduire concernant la matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$?

3. Cas d'une matrice diagonalisable.

(a) Montrer que toute matrice diagonale d'ordre n à coefficients réels est pseudo-inversible et préciser sa pseudo-inverse.

(b) Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pseudo-inversible et P une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.
Montrer que la matrice $A' = P^{-1}AP$ est pseudo-inversible et déterminer sa pseudo-inverse en fonction de P et de A^*.

(c) En déduire que toute matrice diagonalisable est pseudo-inversible.

(d) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

i. Déterminer les valeurs propres de A. et les espaces propres de A.

ii. La matrice A est-elle diagonalisable ? *La réponse sera justifiée.*

iii. En déduire que la matrice A est pseudo-inversible.

iv. Déterminer la pseudo-inverse de A.

Partie II : Une caractérisation des matrices pseudo-inversibles.

Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On munit $\mathbb{R}^n$ de sa base canonique $\mathcal{B}$ et on introduit l'endomorphisme canoniquement associé à A, c'est-à-dire l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $A = \text{Mat}(a, \mathcal{B})$.
Le but de cette partie est de montrer que la matrice A est pseudo-inversible si, et seulement si,

$$\text{Ker}(a) \cap \text{Im}(a) = \{0\}.$$

1. Dans cette question, on suppose que A est pseudo-inversible et on introduit l'endomorphisme a^* tel que $A^* = \text{Mat}(a^*, \mathcal{B})$ de sorte que l'on ait :

$$(2) \quad \begin{cases} a \circ a^* = a^* \circ a \\ a \circ a^* \circ a = a \\ a^* \circ a \circ a^* = a^* \end{cases}$$

(a) Prouver que

$$\begin{cases} a^* \circ a \circ a = a \\ a \circ a \circ a^* = a \end{cases}$$

(b) Montrer que $\mathrm{Ker}(a) \cap \mathrm{Im}(a) = \{0\}$.

(c) En déduire que, pour tout vecteur z de $\mathbb{R}^n$, il existe un unique couple de vecteurs $(x, y) \in \mathrm{Ker}(a) \times \mathrm{Im}(a)$ tel que $z = x + y$.

2. Dans cette question, on suppose que $\mathrm{Ker}(a) \cap \mathrm{Im}(a) = \{0\}$.
On définit l'application $a_0 : \mathrm{Im}(a) \to \mathrm{Im}(a)$, $x \mapsto a(x)$ et on admet qu'elle est linéaire.

   (a) Montrer que a_0 est un automorphisme de $\mathrm{Im}(a)$.

   (b) On considère une base $(e_1, \cdots, e_s)$ de $\mathrm{Ker}(a)$ et $(f_1, \cdots, f_r)$ une base de $\mathrm{Im}(a)$ où $r = \mathrm{rg}(a)$.

      i. Donner une relation entre r, s et n. *Cette relation sera justifiée.*

      ii. Montrer que la famille $(e_1, \cdots, e_s, f_1, \cdots, f_r)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

      iii. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique couple (x_1, x_2) tel que

      $$x_1 \in \mathrm{Ker}(a), \quad x_2 \in \mathrm{Im}(a) \quad \text{et} \quad x = x_1 + x_2.$$

   (c) On définit l'application b de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ de la manière suivante :
   pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on considère l'unique couple $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}(a) \times \mathrm{Im}(a)$ tel que $x = x_1 + x_2$ et on pose $b(x) = (a_0)^{-1}(x_2)$.
   Montrer que b est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

   (d) Montrer que :

   $$\begin{cases} a \circ b = b \circ a \\ a \circ b \circ a = a \\ b \circ a \circ b = b \end{cases}$$

   (e) En déduire que A est pseudo-inversible.

3. Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que A est pseudo-inversible si, et seulement si, elle est semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

où A_0 est une matrice carrée inversible de taille $\mathrm{rg}(A)$.