Banque « Agro-Véto »
AT - 0615

Mathématiques :
Méthodes de calcul et raisonnement

Durée : 3 heures

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et éventuellement remplacera le sujet.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les trois exercices sont indépendants.

Exercice de probabilités

On dispose d'une pièce qui, à l'issue d'un lancer, amène PILE avec une probabilité $p \in]0,1[$ et FACE avec une probabilité $q = 1-p$. Tous les lancers effectués sont indépendants. On lance la pièce jusqu'à obtenir deux PILES.

On note U la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir ces deux premiers PILES.

Par exemple, si l'on obtient la suite de lancers :

FACE, FACE, PILE, FACE, PILE

alors on a $U = 5$. Comme l'indique cet exemple, les deux PILES n'ont pas besoin d'être consécutifs.

On note T_1 la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier PILE et T_2 la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires, **une fois le premier PILE obtenu**, pour obtenir le second PILE.

Ainsi, dans l'exemple précédent, on a $T_1 = 3$ et $T_2 = 2$.

1. Espérance et variance de U

1. Donner l'ensemble des valeurs prises par U.
2. Déterminer les lois des variables aléatoires T_1 et T_2, ainsi que leur espérance et leur variance.
3. Justifier que les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes.
4. Donner une relation entre les variables aléatoires U, T_1 et T_2. En déduire l'espérance de la variable aléatoire U. *(On admettra que U admet bien une espérance.)*
5. Déterminer la variance de U. *(On admettra que U admet bien une variance.)*

2. Loi de U

1. Si i et j sont deux entiers naturels non nuls, on considère l'évènement :

$$A_{i,j} = (T_1 = i) \cap (T_2 = j).$$

Calculer $P(A_{i,j})$ pour tous entiers i et j non nuls.

2. Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$. Exprimer l'évènement $(U = n)$ comme la réunion de certains des évènements $A_{i,j}$.
3. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a :

$$P(U = n) = \left(\frac{p}{q}\right)^2 (n-1)q^n$$

4. En utilisant ce qui précède, retrouver la valeur de la somme de la série :

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{n(n-1)}{2^n}$$

3. Loi de T_1 conditionnement à U

1. Soit $n \geqslant 2$ et $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Calculer $P(T_1 = k \mid U = n)$ en fonction de n.
2. Que dire du résultat obtenu ?

Exercice d'analyse

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$, et vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$$

1. Premières propriétés

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Déterminer le signe de la suite (u_n).
3. Donner le sens de variation de la suite (u_n).

2. Divergence vers $+\infty$

1. On suppose dans cette question que la suite (u_n) converge vers un réel L. Montrer que l'on aboutit à une contradiction.
2. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

3. Obtention d'un équivalent

On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par la relation :

$$v_n = e^{u_n}.$$

1. Déterminer le signe et le sens de variation de la suite (v_n).
2. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ on a :

$$1 + x \leq e^x \leq 1 + ex.$$

3. Vérifier que pour tout entier naturel n, on a :

$$1 + \frac{1}{v_n} \leqslant e^{\frac{1}{v_n}}$$

En déduire alors que $v_{n+1} - v_n \geq 1$.

4. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geq \ln(n+1)$.
5. Montrer, à l'aide d'un raisonnement analogue, que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \leq \ln(ne + 1).$$

6. Donner un équivalent simple de la suite (u_n).

Exercice d'algèbre

On définit, pour tout nombre réel a, la matrice :

$$M_a = \begin{pmatrix} a-1 & -1 \\ 2 & a+2 \end{pmatrix}$$

1. (a) On considère l'équation :

$$(x-1)(x+2) + 2 = 0,$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Résoudre cette équation.

   (b) Pour quelles valeurs de a la matrice M_a est-elle inversible ?

   (c) Déterminer, en fonction de a, les valeurs propres de la matrice M_a.

2. Donner une base de chacun des sous-espaces propres de la matrice M_a.
3. Donner une matrice P inversible, de taille 2×2, telle que la matrice $P^{-1}M_aP$ est diagonale.
4. Soit a et b deux nombres réels. Montrer que $M_aM_b = M_bM_a$.
5. Soit n un entier naturel non nul. On considère la matrice A_n suivante :

$$A_n = M_1M_2M_3 \dots M_n$$

obtenue en effectuant le produit des n matrices $M_1, M_2, \dots, M_n$. Donner, en fonction de n, quatre nombres réels a_n, b_n, c_n, d_n tels que :

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}.$$

6. On considère deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$, telles que $u_1 = -2$, $v_1 = 4$ et qui vérifient les relations de récurrence suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+1} = (n-1)u_n - v_n \quad \text{ et } \quad v_{n+1} = 2u_n + (n+2)v_n$$

Donner, en fonction de n, une expression du terme général u_n de la suite.

Fin de l'épreuve