Banque « Agro-Véto »
AT - 0616

Mathématiques : Méthodes de calcul et raisonnement

Durée : 3 heures

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et éventuellement remplacera le sujet.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les trois exercices sont indépendants.

Exercice d'algèbre

Dans cet exercice, toutes les matrices considérées sont à coefficients réels. On note de plus, dans tout l'exercice :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On appelle enfin f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice canoniquement associée est A.

1. Diagonalisation de A

1. (a) Calculer le rang de f.
   (b) En déduire la dimension du noyau de f.
   (c) Montrer que 0 est une valeur propre de f, et que la famille $\big((-1,2,0)\big)$ est une base du sous-espace propre associé.
2. (a) Déterminer tous les vecteurs $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(x,y,z) = 8(x,y,z)$.
   (b) Montrer que 8 est valeur propre de f, et donner une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 8. Les coefficients du ou des vecteurs formant cette base seront des entiers.
3. (a) Calculer $f(1,-1,0)$.
   (b) En déduire une troisième valeur propre de f, et donner une base du sous-espace propre associé à cette valeur propre.
4. Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable.
5. On pose $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice P est inversible, et calculer l'inverse de P.
6. Donner une relation entre P^{-1}, A, P et D.

2. Résolution d'une première équation matricielle

On cherche à déterminer toutes les matrices N, de taille 3×3, à coefficients réels, telles que :

$$N^3 = D \quad (E)$$

7. Question préliminaire. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   (a) l'équation $x^3 = 8$, d'inconnue réelle $x \in \mathbb{R}$;
   (b) l'équation $x^3 = -1$, d'inconnue réelle $x \in \mathbb{R}$.
8. Soit N une matrice qui vérifie (E). Montrer qu'alors $DN = ND$.
9. En déduire que la matrice N est diagonale. On pourra commencer par écrire $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et en déduire un système d'équations portant sur les coefficients de la matrice N.
10. En écrivant N sous la forme $N = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$ avec $(d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}^3$, montrer qu'il existe une unique matrice N qui vérifie (E), et donner cette matrice.

3. Résolution d'une seconde équation matricielle

On cherche à déterminer toutes les matrices M, de taille 3×3, telles que :

$$M^3 = A \quad (E')$$

11. Soit M une matrice de taille 3×3. Montrer que :

$$M^3 = A \iff (P^{-1}MP)^3 = D$$

12. En déduire la ou les solutions de (E').
13. Existe-t-il des matrices M à coefficients réels telles que $M^2 = A$?

Exercice d'analyse

1. Une fonction trinôme du second degré

Soit a un nombre réel, fixé. On considère la fonction polynôme P, de degré 2, définie pour tout réel x par :

$$P(x) = x^2 - 2x + a^2 + 2$$

1. Calculer, en fonction de a, le discriminant de P. Donner le signe du discriminant.
2. En déduire le signe de P.
3. Donner le sens de variation de la fonction P, montrer que P admet un minimum sur $\mathbb{R}$ et donner la valeur de ce minimum. Dresser le tableau de variations de la fonction P. On fera également apparaître les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Etude d'une fonction d'une variable réelle

Dans cette partie, a désigne toujours un nombre réel. On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + a^2 + 2}$$

4. Montrer que f est bien définie pour tout réel x.
5. Donner le signe de $f(x)$ pour tout x.
6. Donner le sens de variation de f, et les limites en $+\infty$ et $-\infty$.

7. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \leq \dfrac{1}{a^2+1}$.
8. Dresser un tableau résumant les informations précédentes : variations de f, valeur du maximum, et limites.

3. Une fonction de deux variables

On envisage la fonction de deux variables réelles :

$$u(x,y) = \frac{1}{x^2 - 2x + y^2 + 2}$$

On pourra librement utiliser les résultats de la partie précédente, en particulier en posant $a = y$.

9. Montrer que pour tout réels x et y, on a $0 < u(x,y) \leq 1$.
10. Montrer que :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2(1-x) \times (u(x,y))^2$$

On admettra sans justification que u est effectivement dérivable par rapport à x.

11. Calculer de même $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)$ en fonction de x et de y. On admettra sans justification que u est bien dérivable par rapport à y.
12. (a) Question de cours : supposons que u admette un extremum local en (x_0, y_0). Que dire de $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)$ et de $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$?

    (b) Application : donner tous les couples $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, u(x,y) \leq u(x_0,y_0).$$

13. Existe-t-il un couple $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, u(x,y) \geq u(x_1,y_1) \,?$$

Exercice de probabilités

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire deux jetons de l'urne au hasard.

On étudie dans la première partie de l'exercice le cas d'un tirage avec remise, et dans la seconde partie le cas d'un tirage sans remise lorsque l'urne contient quatre jetons. Les deux parties sont indépendantes.

1. Cas d'un tirage avec remise

On note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du premier jeton tiré, et X_2 la variable aléatoire égale au numéro du second jeton tiré. On appelle M la variable aléatoire égale au plus grand de ces deux numéros.

1. Montrer que la variable aléatoire X_1 suit une loi uniforme sur un ensemble à préciser. Donner, de même, la loi de X_2.
2. Justifier que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes.
3. Soit i un entier naturel compris entre 1 et n.

   (a) On note A_i l'événement $(X_1 \leq i)$, et B_i l'événement $(X_2 \leq i)$. Décrire par une phrase, en français, ces événements. Montrer que $P(A_i) = \dfrac{i}{n}$. Calculer de même $P(B_i)$.

   (b) Décrire, en français, l'événement $A_i \cap B_i$. Calculer la probabilité de cet événement.

(c) On appelle F_M la fonction de répartition de la variable aléatoire M. Rappeler la définition de F_M. Donner ensuite la valeur de $F_M(i)$.

(d) Déduire de ce qui précède que, pour tout entier i compris entre 1 et n on a $P(M = i) = \dfrac{2i-1}{n^2}$.

4. Calculer l'espérance de M en fonction de n.
5. On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = E(M)$. Trouver un réel A tel que $u_n \sim An$.
6. On note dans cette question $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$. On veut démontrer que :

$$S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

(a) Si x est un nombre réel, développer et simplifier l'expression :

$$(x+1)^4 - x^4.$$

(b) Montrer alors que

$$\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^4 - k^4\right) = 4S_n + 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} + n + 1.$$

(c) Donner une autre expression de $\sum_{k=0}^{n} (k+1)^4 - k^4$, en faisant appel à un télescopage.

(d) En déduire la valeur de S_n.

7. Démontrer que $E(M^2) \leq \dfrac{(n+1)^2}{2}$.
8. En déduire que $V(M) \leq \dfrac{(n+1)^2}{2}$.

2. Cas d'un tirage sans remise, avec $n = 4$.

On suppose dans cette partie que l'urne contient $n = 4$ jetons. On suppose aussi que le tirage est sans remise : le premier jeton n'est donc pas remis dans l'urne avant le tirage du second jeton.

On appelle Y_1 le numéro du premier jeton tiré, et Y_2 le numéro du second jeton tiré. Il est clair que Y_1 suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$, ce que l'on pourra utiliser dans la suite.

9. Soit j un entier naturel compris entre 1 et 4. Justifier que :

$$P(Y_2 = 1 | Y_1 = j) = \begin{cases} \frac{1}{3} \ si \ j \in \{2, 3, 4\} \\ 0 \ si \ j = 1 \end{cases}$$

10. En déduire la valeur de $P(Y_2 = 1)$. On pourra employer la formule des probabilités totales.
11. En procédant de même qu'à la question 1, donner aussi $P(Y_2 = i | Y_1 = j)$ pour tous i et j dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$.
12. Donner alors la loi de Y_2, puis l'espérance et la variance de cette variable aléatoire.
13. Donner la loi conjointe du couple (Y_1, Y_2). On pourra représenter cette loi sous forme d'un tableau à double entrée.
14. Calculer la covariance du couple (Y_1, Y_2).

Fin de l'épreuve