

Mathématiques : Méthodes de calcul et raisonnement

Durée : 3 heures

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et éventuellement remplacera le sujet.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les trois exercices sont indépendants.

Exercice d'analyse

1. Etude d'une suite auxiliaire On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$, et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Déterminer le nombre réel L tel que $L = \frac{1}{2}L + 1$.
3. On pose, pour tout entier naturel n , $a_n = u_n - 2$. Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
4. Donner alors l'expression du terme général u_n en fonction de n .
5. Montrer que la suite (u_n) est convergente, et donner la valeur de sa limite.

2. Etude d'une deuxième suite

On considère la suite (v_n) telle que $v_0 = \frac{1}{4}$, et vérifiant, pour tout entier naturel n , la relation :

$$v_{n+1} = \frac{2v_n}{1 + 2v_n}$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n fixé, le nombre v_n est bien défini et que l'on a $v_n > 0$.
On pourra raisonner par récurrence sur n .
2. Montrer que pour tout entier naturel n , on a la relation $\frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{2v_n} + 1$.
3. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer ℓ , la limite de (v_n) .
4. Donner un équivalent, le plus simple possible, de $(v_n - \ell)$.

Exercice de probabilités

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} a \sin^2(x) & \text{si } x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Valeur de a

1. On pose $I = \int_0^\pi \sin^2(x)dx$ et $J = \int_0^\pi \cos^2(x)dx$. Calculer $I + J$.
2. Donner la dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} \sin(2x)$ sur \mathbb{R} ; en déduire la valeur de l'intégrale $K = \int_0^\pi \cos(2x)dx$.
3. Montrer que l'on a $J - I = 0$.
4. En déduire la valeur de I .
5. Déterminer alors la valeur du nombre réel a pour que la fonction f soit une densité de probabilité. On conserve cette valeur par la suite.
On considère désormais X , une variable aléatoire de densité f .

2. Espérance de X

1. Donner une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} \sin(2x)$.
2. En intégrant par parties, calculer l'intégrale $\int_0^\pi x \cos(2x)dx$.
3. Trouver des coefficients réels α et β tels que, pour tout réel x on a :

$$\sin^2(x) = \alpha + \beta \cos(2x)$$

4. En déduire que la variable aléatoire X admet une espérance que l'on calculera.

3. Fonction de répartition

1. Donner une primitive de la fonction $x \mapsto \sin^2(x)$. On pourra utiliser la question 2.3.
2. Si x est un réel n'appartenant pas à l'intervalle $[0, \pi]$, calculer la probabilité $P(X \leq x)$.
3. Donner la fonction de répartition de la variable aléatoire X .
4. Calculer la probabilité de l'événement $(|X| \leq \frac{\pi}{2})$.

4. Espérance de $\cos(X)$

On pose $Y = \cos(X)$. On admet que la variable aléatoire Y admet une espérance.

1. Calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^\pi \cos(x) \sin^2(x)dx$.
2. Donner alors la valeur de l'espérance de Y .

Exercice d'algèbre (et application aux probabilités)

Dans tout ce qui suit on pourra identifier, selon la convention habituelle, un élément de \mathbb{R}^n avec la matrice colonne qui lui est canoniquement associée.

On se donne les matrices suivantes A, N, J et P définies comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}; N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Enfin I_3 désignera la matrice identité : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Diagonalisabilité de J et de J^n .

1. Montrer que la matrice P est inversible et que son inverse vérifie :

$$P^{-1} = \alpha \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

où α est un nombre réel non nul que l'on précisera.

2. Montrer que 0 est valeur propre de la matrice J ; on note E_0 le sous-espace propre associé.
3. Déterminer une base de E_0 .
4. Montrer que le vecteur $(1, 1, 1)$ est vecteur propre de J . Déterminer la valeur propre associée.
5. Calculer le rang de la matrice $J - 3I_3$. En déduire la dimension du sous-espace propre E_3 (E_3 est le sous-espace propre associé à la valeur propre 3).
6. Montrer que J est diagonalisable : en particulier, donner une matrice D diagonale telle que $PD = JP$.
7. Calculer aussi $P^{-1}J^nP$ pour tout entier naturel n non nul (on attend le résultat sous la forme d'une matrice 3×3 dont on donnera les coefficients).
8. Grâce à ce qui précède, et sans effectuer de récurrence, prouver que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $J^n = 3^{n-1}J$.

2. Non-diagonalisabilité de A

1. Calculer N^2 , ainsi que les produits JN et NJ .
2. En raisonnant par l'absurde, et en utilisant la question précédente, montrer que N n'est pas diagonalisable. *Indication : si N était diagonalisable, alors il existerait une matrice Q inversible et une matrice D diagonale, telles que $N = Q^{-1}DQ$. Que dire alors de la matrice D^2 ?*
3. Dans cette question uniquement, on *admet* le résultat suivant :

« Soit E un espace vectoriel de dimension finie, soit f et g sont deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Si f et g sont diagonalisables, alors $f + g$ est aussi diagonalisable. »

(a) Donner deux nombres réels a et b tels que $A = aJ + bN$.

(b) En utilisant le résultat admis, montrer que A n'est pas diagonalisable.

3. Calcul de A^n

1. Grâce à la question 2.1 et à la question 2.3.a, calculer A^2 et A^3 .
2. Donner, pour tout entier naturel $n \geq 2$, l'expression de A^n en fonction de n .

4. Une application aux probabilités

Un feu tricolore peut être dans trois états : Rouge, Jaune, et Vert. Cependant, il est dérégulé, et son comportement est aléatoire. Plus précisément, à chaque instant $n \in \mathbb{N}$, il change d'état selon les règles suivantes :

- Si à l'instant n le feu est dans l'état Rouge ou dans l'état Orange, alors à l'instant $n + 1$ il est dans l'état Rouge avec probabilité $\frac{4}{9}$, dans l'état Orange avec probabilité $\frac{2}{9}$, et dans l'état Vert avec probabilité $\frac{3}{9}$.
- Si à l'instant n le feu est dans l'état Vert, alors à l'instant $n + 1$ il est dans l'état Rouge avec probabilité $\frac{1}{9}$, dans l'état Orange avec probabilité $\frac{5}{9}$, et dans l'état Vert avec probabilité $\frac{3}{9}$.

On note r_n, o_n, v_n les probabilités respectives des événements : (À l'instant n , le feu est Rouge), (À l'instant n , le feu est Orange), et (À l'instant n , le feu est Vert).

Enfin, on suppose qu'à l'instant $n = 0$, le feu est Vert.

On note désormais $M = \frac{1}{9}A$ et $X_n = \begin{pmatrix} r_n \\ o_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Exprimer r_{n+1} en fonction de r_n, o_n, v_n . Justifier.
2. Faire de même avec o_{n+1} et v_{n+1} (sans justifier).
3. Exprimer X_n en fonction de M, n et X_0 .
4. Lorsque n est très grand, quel est le comportement du feu tricolore ?

Fin de l'épreuve