SESSION 2015

CONCOURS G2E

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites pour cette épreuve.
L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est strictement interdit.
Si, au cours de l'épreuve, le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.
Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.
Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentation des différents schémas.
Les deux problèmes sont indépendants.

PROBLÈME 1

Dans tout le problème on se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique notée (e_1, e_2, e_3) et de son produit scalaire usuel (classiquement noté $\cdot$). On identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et les matrices de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On rappelle que pour tout $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, A^0 désigne, par convention, la matrice identité.

Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $A_k = (a_{i,j}(k))_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$. On dit que la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente si pour tout $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$ la suite réelle $(a_{i,j}(k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel noté $\ell_{i,j}$. La matrice $L = (\ell_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ est alors appelée limite de $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Dans la partie A du problème, on étudie une situation probabiliste faisant intervenir une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On étudie dans la partie B, quelques propriétés de matrices dont les colonnes satisfont une certaine relation puis on détermine les puissances successives de A. Dans la partie C, on considère des matrices que l'on diagonalise et on retrouve les puissances successives de A. Enfin, dans la dernière partie, on calcule une espérance d'une variable aléatoire discrète. Ces parties peuvent être abordées indépendamment les unes des autres.

Partie A : Une situation faisant intervenir une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

En cas d'incident et sans intervention d'un technicien, un système électrique se trouve dans un des trois états suivants :
- état E_1 : premier type d'incident non critique.
- état E_2 : second type d'incident non critique.
- état E_3 : incident critique. Le système est définitivement à l'arrêt.

Dans une telle situation, son état est, à chaque heure, susceptible d'évoluer et de passer d'un état à un autre. Pour tout $(i,j) \in [\![1,3]\!]$, on note $a_{i,j}(1)$ la probabilité de passer de l'état E_j à l'état E_i au bout d'une heure. p désignant un réel de $]0,1[$ et $q = 1-p$, on a les probabilités suivantes :

$$a_{1,1}(1) = a_{2,2}(1) = p \qquad a_{2,1}(1) = a_{3,2}(1) = q.$$

1. On appelle instant initial l'instant où le système subit un premier incident. On suppose dans cette question qu'à l'instant initial le système est dans l'état E_1.
   (a) Quelle est la probabilité qu'il soit encore à l'état E_1 au bout de trois heures ?
   (b) Quelle est la probabilité qu'il soit à l'état E_3 au bout de trois heures ?
   (c) Quelle est la probabilité qu'il soit à l'état E_3 en exactement trois heures ?
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. On note u_k (respectivement v_k et w_k) la probabilité que le système soit dans l'état E_1 (respectivement E_2 et E_3) au bout de k heures.
   (a) Démontrer qu'il existe $x_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que $u_{k+1} = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix} \cdot x_1$.
   (b) En tenant le même raisonnement pour v_{k+1} et w_{k+1}, en déduire que :
   $$\begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \\ w_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ q & p & 0 \\ 0 & q & 1 \end{pmatrix}.$$
   (c) On note $A^k = (a_{i,j}(k))_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$. Interpréter alors le coefficient $a_{i,j}(k)$ (pour $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$).

Partie B : Puissances successives d'une matrice

1. On note $v = e_1 + e_2 + e_3$ et $\mathcal{E}_3$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les sommes des coefficients sur chaque colonne est égal à 1 : par exemple la matrice A introduite dans la partie A est une telle matrice.
   (a) Démontrer par récurrence que si $M \in \mathcal{E}_3$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k \in \mathcal{E}_3$.
   (b) En calculant ${}^tMv$, démontrer que si $M \in \mathcal{E}_3$ alors 1 est valeur propre de M.
2. (a) Démontrer que 1 et p sont les seules valeurs propres de la matrice A et déterminer des vecteurs propres associés.
   (b) A est-elle inversible ? diagonalisable ?
3. (a) Démontrer que :
   $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = \begin{pmatrix} p^k & 0 & 0 \\ kqp^{k-1} & p^k & 0 \\ a_k & 1-p^k & 1 \end{pmatrix}.$$
   où a_k est un coefficient à déterminer.
   (b) Déduire de la question précédente la convergence de la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et en préciser la limite.

Partie C : Diagonalisations de matrices

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application canoniquement associée à la matrice ci-dessous :

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Démontrer que $\operatorname{Ker} u$ est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à v (*cf.* partie B). En déduire $\dim \operatorname{Ker} u$ puis $\operatorname{rg} u$.
   (b) Justifier que 1 est valeur propre de u et donner un vecteur propre associé à cette valeur.
2. Déduire des questions précédentes que u est diagonalisable dans une base $\mathcal{B}$ et écrire $L = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale à préciser, P la matrice de passage de la base canonique vers $\mathcal{B}$. Calculer P^{-1}.
3. On pose B et C les matrices ci-dessous et on admet que B et C commutent :
$$B = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ q & q & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \\ -q & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) En utilisant la base $\mathcal{B}$ précédente, vérifier que B est diagonalisable.
   (b) En déduire B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (c) Calculer C^2 et, A désignant toujours la matrice introduite en partie A, en déduire que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = B^k + kB^{k-1}C.$$
   (d) Retrouver alors l'expression donnée en B 3. (a).

Partie D : Calcul d'une espérance

On rappelle que p désigne un réel de $]0,1[$ et que $q = 1 - p$.

1. Sans justification, rappeler la nature de la série $\sum_{k\geqslant 2} k(k-1)p^{k-2}$ et en donner sa somme.
2. On suppose à nouveau dans cette dernière question que le système est dans l'état E_1 à l'instant initial et on appelle X la variable aléatoire donnant le nombre exact d'heure(s) pour que le système atteigne l'état E_3.
   (a) Calculer $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.
   (b) a_k désignant le coefficient introduit dans la partie A, justifier que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = a_k - a_{k-1}.$$
   (c) En déduire $E(X)$.

PROBLÈME 2

Dans tout le problème λ désigne un réel strictement positif, n un entier naturel, p un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $k \in [\![1, p]\!]$. Si X désigne une variable aléatoire à densité alors F_X désigne la fonction de répartition de X, f_X une densité de X et on note $\overline{F}_X$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\overline{F}_X(t) = 1 - F_X(t)$.

Dans la partie A, on étudie quelques propriétés classiques des lois exponentielles. La partie B est consacrée au calcul d'une limite d'une probabilité conditionnelle. Enfin, dans la partie C, on étudie la somme de certaines variables aléatoires. Ces parties peuvent être abordées indépendamment les unes des autres.

Partie A : Des lois exponentielles

On considère p techniciens qui interviennent auprès d'une machine. Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on note X_k la variable aléatoire donnant la durée (en heure(s)) de l'intervention du k-ième technicien. On admet que les variables aléatoires $(X_k)_{k\in[\![1,p]\!]}$ sont mutuellement indépendantes et suivent la même loi exponentielle de paramètre λ.

1. (a) Démontrer par récurrence sur n que la variable aléatoire X_k admet un moment à tout ordre n égal à :
$$m_n(X_k) = \frac{n!}{\lambda^n}.$$
   (b) Déterminer la nature et la somme de la série de terme général $\frac{1}{m_n(X_k)}$ (pour $n \in \mathbb{N}$).
2. On note $Y_p = \min(X_1, \dots, X_p)$.
   (a) Calculer $\overline{F}_{X_1}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (b) En considérant $\overline{F}_{Y_p}(t)$ (pour $t \in \mathbb{R}$), démontrer que la variable aléatoire Y_p suit une loi exponentielle de paramètre $p\lambda$.
   (c) Exprimer $\mathrm{E}(Y_p)$ et $\mathrm{Var}(Y_p)$ en fonction de λ.
3. On suppose, dans cette question uniquement, que $p = 2$ et que la durée moyenne de l'intervention du premier technicien est de deux heures. Calculer alors les probabilités ci-dessous.
   (a) probabilité que la durée de l'intervention du second technicien soit inférieure ou égale à 2 heures.
   (b) probabilité que le minimum des durées des interventions des deux techniciens soit inférieur ou égal à 1 heure sachant que la durée de l'intervention du second technicien est supérieure ou égale à 2 .
   (c) probabilité que le minimum des durées des interventions des deux techniciens soit inférieur ou égal à 1 heure sachant que la durée de l'intervention du second technicien est inférieure ou égale à 2.

Partie B : Calcul d'une limite d'une probabilité

1. On note $Z_2 = \max(X_1, X_2)$.
   (a) Démontrer que la variable aléatoire Z_2 admet une densité que l'on exprimera à l'aide de densités de lois exponentielles.
   (b) Démontrer que la variable aléatoire Z_2 admet une espérance et obtenir une égalité entre $\mathrm{E}(Y_2) + \mathrm{E}(Z_2)$ et $\mathrm{E}(X_1 + X_2)$. Pouvait-on anticiper cette égalité ?
   (c) Justifier enfin l'existence de $\mathrm{Var}(Z_2)$ et la calculer.
2. Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer $P(Z_2 \geqslant n + x)$ et démontrer que $P(Z_2 \geqslant n + x)$ est équivalent (quand n tend vers $+\infty$) au terme général d'une suite géométrique dont on précisera la raison et le terme initial
   (b) Démontrer que :
$$\lim_{n \to +\infty} P(Z_2 \geqslant n + x | Z_2 \geqslant n) = P(X_1 \geqslant x).$$
   (c) La formule précédente est-elle encore exacte si on remplace la variable aléatoire Z_2 par la variable aléatoire X_1 ?

Partie C : Sommes de variables aléatoires

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\} \times \mathbb{R}$.
   (a) Démontrer que la variable aléatoire $aX_2 + b$ admet une densité définie par :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{aX_2+b}(t) = \begin{cases} \frac{\lambda}{a} \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{a}(t-b)} \text{ si } t \geqslant b \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} .$$

(b) Démontrer que les variables aléatoires X_1 et $aX_2 + b$ sont indépendantes.

2. On note $T = X_1 + aX_2 + b$ et on rappelle que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densités f_X et f_Y alors $X + Y$ est une variable aléatoire dont une densité est définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t) f_Y(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

   (a) Démontrer que T admet une densité définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_T(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{1-a}\left(\mathrm{e}^{-\lambda(x-b)} - \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{a}(x-b)}\right) & \text{si } x \geqslant b \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

   (b) Démontrer qu'il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\} \times \mathbb{R}$ tel que Z_2 (*cf.* partie B) et T suivent la même loi.

3. On prolonge l'étude précédente et on considère la variable aléatoire :
$$T_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} X_k.$$

   (a) Calculer $\mathrm{E}(T_p)$ et $\mathrm{Var}(T_p)$. En déduire la nature (convergence ou divergence) des suites $(\mathrm{E}(T_p))_{p \geqslant 2}$ et $(\mathrm{Var}(T_p))_{p \geqslant 2}$.

   (b) Démontrer par récurrence que T_p admet une densité définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{T_p}(x) = \begin{cases} \lambda p \mathrm{e}^{-\lambda x}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\right)^{p-1} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$