

CONCOURS

PHYSIQUE

Durée : 3 heures 30

Les calculatrices sont autorisées.

L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est strictement interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.

Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentation des différents schémas ainsi qu'aux réponses aux applications numériques.

Dans ce problème, on s'intéresse aux différents aspects de l'humidité de l'air.

Dans toute l'épreuve les gaz et les vapeurs, même saturantes, sont supposés parfaits. L'air humide sera considéré comme un mélange d'air sec de masse molaire $M_a = 29 \text{ g.mol}^{-1}$ et de vapeur d'eau de masse molaire $M_e = 18 \text{ g.mol}^{-1}$.

On donne : $R = 8,3 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

On rappelle qu'à l'ordre un en ε : pour $\varepsilon \ll 1$, $\ln(1 + \varepsilon) \approx \varepsilon$, $(1 + \varepsilon)^a \approx 1 + a\varepsilon$, $e^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon$.

1. Pression de vapeur saturante

On s'intéresse à l'équilibre eau liquide - eau vapeur.

1.1. Comment varie la pression d'un mélange liquide-vapeur évoluant à température constante lors d'un changement d'état ? On pourra justifier la réponse par un rapide calcul de variance.

1.2. On admet que l'enthalpie massique de vaporisation $\Delta h = h_v - h_L = \ell_v$ vérifie la relation dite de Clapeyron : $\ell_v = T(v_v - v_L) dP_s/dT$ où v_v et v_L sont les volumes massiques respectivement de la vapeur saturante et du liquide saturant, et $P_s(T)$ la pression de vapeur saturante à la température T . On suppose que ℓ_v est indépendante de la température et que $v_L \ll v_v$.

1.2.1 Justifier l'approximation $v_L \ll v_v$ en comparant numériquement le volume massique d'un gaz parfait dans les conditions normales de température et de pression et celui de l'eau liquide.

1.2.2 On suppose $P_s(T_0) = P^\circ$ avec $T_0 = 373 \text{ K}$ et $P^\circ = 10^5 \text{ Pa}$.

Simplifier la relation de Clapeyron et démontrer alors par intégration la relation approchée dite de Rankine dont nous nous servirons dans plusieurs parties de ce problème :

$$\ln P_s = A - \frac{B}{T} \text{ avec } A \text{ et } B \text{ des constantes : } A = \ln P^\circ + \frac{M_e \ell_v}{R} \frac{1}{T_0} \quad B = \frac{M_e \ell_v}{R}$$

T_0 est la température d'ébullition de l'eau sous P°

1.3. On prendra pour la suite : $A = 13,28$ et $B = 4952 \text{ K}$ avec P_s en bars et T en K.

Calculer numériquement P_s pour les températures 278 K et 300 K, ainsi que ℓ_v .

2. Enthalpie de vaporisation

Un récipient calorifugé contient de l'eau. Il est placé sur une balance monoplateau (Figure 1).

Un thermoplongeur de puissance $P = 350 \text{ W}$ est immergé dans le récipient et porte l'eau à ébullition donc à 100°C sous la pression de 1 bar approximativement. La balance permet de

mesurer la masse m d'eau évaporée pendant la durée t , à partir de l'ébullition. La puissance thermique perdue, qui ne sert pas à chauffer l'eau, est supposée constante et notée Φ .

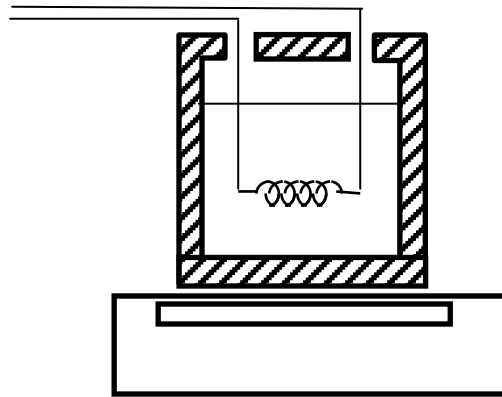


Fig. 1

2.1. Établir la relation entre l'enthalpie de vaporisation l_v , m , Φ , t et P .

2.2. On réalise une première expérience qui permet de mesurer $m = m_1 = 21$ g pour $t = 3$ min. Dans une deuxième expérience, on ajoute dans le récipient un deuxième thermoplongeur identique au précédent et on obtient $m = m_2 = 49$ g pour la même durée t .

2.2.1. Écrire le système de deux équations vérifié par l_v et Φ , et faisant intervenir m_1 , m_2 , P et t . Exprimer l_v en fonction de P, t, m_2 et m_1 .

2.2.2. En déduire la valeur de l'enthalpie de vaporisation l_v et comparer à la valeur obtenue à la question 1.3. On pourra calculer un écart relatif entre ces deux valeurs.

3. Hygromètre à condensation

Un hygromètre à condensation est un appareil qui sert à mesurer l'humidité (vapeur sèche) dans un mélange gazeux. Il est fondé sur la mesure de la température du point de rosée, laquelle dépend de façon univoque du taux d'humidité, comme le décrit la théorie des diagrammes binaires. On injecte le gaz contenant de la vapeur d'eau sèche sous un débit contrôlé, il entre ensuite en contact avec un miroir placé dans l'appareil.

Un faisceau lumineux est réfléchi sur le miroir sous un angle d'incidence i et il est envoyé à un récepteur (Figure 2). Par la suite, on refroidit le miroir jusqu'à ce que de la condensation se forme sur ce dernier ; l'intensité du faisceau lumineux est alors atténuée, et on peut mesurer la température de rosée. On rappelle que le point de rosée ou température de rosée est la température la plus basse qu'une masse d'air peut atteindre, à pression et humidité données, sans qu'il ne se forme d'eau liquide par saturation.

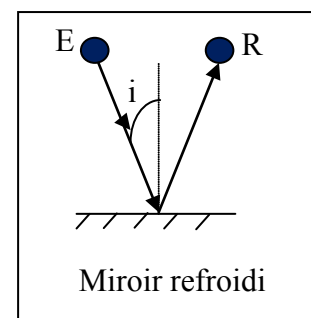


Fig. 2

En présence de la couche d'eau d'épaisseur e qui s'est condensée sur le miroir, le rayon lumineux incident se partage entre un rayon lumineux R_1 qui se réfléchit sur la face supérieure de la couche d'eau et un rayon R_2 qui s'y réfracte (angle r) puis se réfléchit sur le miroir puis se réfracte à nouveau, cette fois-ci dans le sens eau vers air (Figure 3).

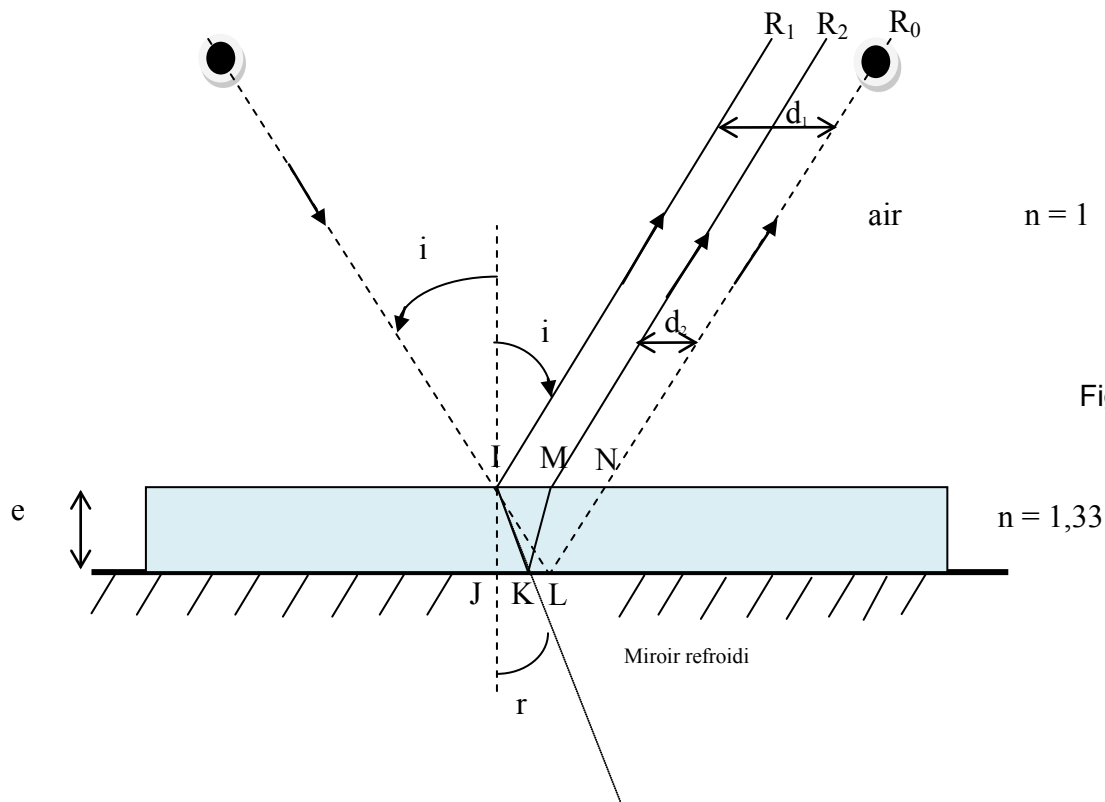


Fig. 3

- 3.1. Pourquoi ces deux rayons sont-ils atténués par rapport au rayon R_0 qui se réfléchit sur le miroir lorsque l'air est sec ? Est-il possible d'observer une réflexion totale en M ?
- 3.2. Exprimer, en fonction de e , i et r , les distances d_1 et d_2 mesurées horizontalement dont sont décalés les deux rayons R_1 et R_2 par rapport au rayon R_0 . Peut-on se placer dans les conditions de Gauss pour linéariser les relations ?

4. Hygromètre capacitif

Pour mesurer l'humidité de l'air, on mesure la capacité C_x d'un condensateur dont le diélectrique (isolant séparant les armatures) est hydrophile, grâce à un montage dit pont de Sauty (Figure 4). La capacité du condensateur étant, on l'admet, dans une relation linéaire avec l'humidité de l'air, sa mesure permet bien de déterminer l'humidité de l'air. Le pont est alimenté par un courant alternatif de haute fréquence (une fréquence élevée favorisant une plus faible consommation d'énergie).

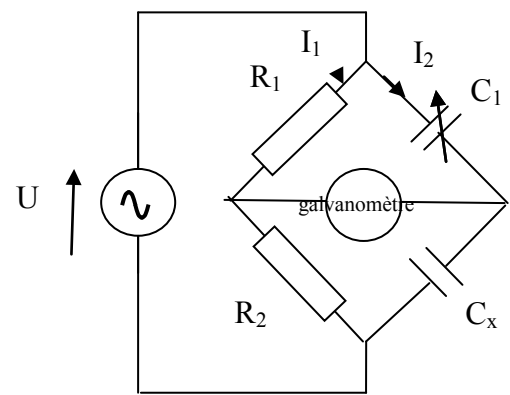


Fig. 4

On ajuste la capacité C_1 de sorte que le courant sinusoïdal qui passe dans le galvanomètre G (assimilé à une résistance quasi-nulle) soit nul. On dit alors que le pont est équilibré. Cette mesure par passage par 0 s'avère très précise.

On veut montrer, à l'aide des lois des nœuds et des mailles (en notation complexe), qu'il existe alors une relation entre C_1 , C_x et les résistances R_1 et R_2 . On note ω la pulsation de la tension sinusoïdale délivrée par le générateur et \underline{U} l'amplitude complexe de cette dernière.

- 4.1. Exprimer l'amplitude complexe \underline{I}_1 du courant dans la branche de gauche du pont (conducteurs ohmiques R_1 et R_2).
- 4.2. Exprimer l'amplitude complexe \underline{I}_2 du courant dans la branche de droite du pont (condensateurs de capacités C_1 et C_x). On utilisera les impédances complexes des condensateurs.
- 4.3. Exprimer le fait que la tension aux bornes du galvanomètre se doit d'être nulle pour que le courant dans le galvanomètre soit nul et en déduire C_x en fonction de C_1 , R_1 et R_2 .

5. Degré hygrométrique de l'air humide

On considère un volume V d'air humide à la température T sous la pression atmosphérique P approximée à la pression standard $P^\circ = 1\text{bar}$.

Le degré hygrométrique de l'air, exprimé en pourcentage, est défini par $e = P_e(T)/P_s(T)$ où $P_e(T)$ est la pression partielle de la vapeur d'eau à la température T .

- 5.1. Montrer que le degré hygrométrique peut s'écrire : $e = m_e/m_s$ où m_e est la masse de vapeur d'eau contenue dans le volume V d'air humide et m_s la masse de vapeur d'eau dont la pression partielle est la pression de vapeur saturante dans le même volume V .
- 5.2. Donner le degré hygrométrique pour de l'air parfaitement sec et pour de l'air saturé en vapeur d'eau.
- 5.3. On appelle humidité absolue d'un air humide, le rapport $x = m_e/m_a$ où m_a est la masse d'air sec contenue dans le volume V d'air humide.

Montrer que ce quotient peut se mettre sous la forme : $x = \delta \frac{P_e(T)}{P - P_e(T)}$ où $\delta = \frac{M_e}{M_a} = 0,62$ est la

densité de la vapeur d'eau par rapport à l'air sec.

- 5.4. Dans un atelier de volume $V = 300\text{ m}^3$, le degré hygrométrique est $e = 40\%$.

La température est de 27°C (soit $T = 300\text{ K}$) et la pression totale est de $P = P^\circ = 1\text{ bar}$.

On donne $P_s(27^\circ\text{C}) = 3969\text{ Pa}$.

- 5.4.1. Calculer x .

- 5.4.2. En déduire les masses m_a et m_e ainsi que la masse totale d'air humide m_h .

- 5.5. Durant la nuit, le local n'est pas chauffé et sa température chute, de façon isochore, à 5°C soit $T' = 278\text{ K}$.

- 5.5.1. Préciser la nouvelle pression partielle de la vapeur d'eau P'_e .

- 5.5.2. On donne $P_s(5^\circ\text{C}) = 10\text{ mbar}$. Montrer que l'air est alors saturé en vapeur d'eau. En déduire le nouveau degré hygrométrique e' de l'atmosphère du local ainsi que la masse d'eau liquéfiée.

- 5.6. La température de rosée T_R est la température à laquelle il faut refroidir l'air humide, à pression constante, pour faire apparaître la première goutte d'eau liquide.

En utilisant la formule de Rankine de la question 1-2, $\ln P_s = A - \frac{B}{T}$ avec $A = 13,28$ et $B = 4952\text{ K}$,

avec P_s en bars et T en Kelvin, calculer la température de rosée de l'air (atteinte de nuit) de l'atelier considéré précédemment.

6. Formation des nuages

On modélise les transformations thermodynamiques dues à une ascension verticale d'une bulle d'air humide dans l'atmosphère isotherme en considérant que la bulle d'air subit une transformation adiabatique réversible. Au cours de cette ascension la bulle d'air reste constamment en équilibre mécanique avec l'air de l'atmosphère. On donne le rapport :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1,4.$$

On donne au niveau du sol : $T_0 = 300 \text{ K}$, $P_0 = 1 \text{ bar}$ et $e_0 = P_e^0/P_s^0 = 80\%$ le degré hygrométrique quotient de la pression partielle en vapeur d'eau et de la pression de vapeur saturante, ici définis au niveau du sol et qui ne change pas tant qu'il n'y a pas liquéfaction.

Pour $z \ll H_a = \frac{RT_0}{M_a g}$, la pression partielle de l'air sec isotherme varie avec l'altitude z (origine au

niveau du sol) selon la loi approchée : $P_a(z) = P_a^0 \left(1 - \frac{z}{H_a}\right)$ où P_a^0 est la pression partielle au niveau

du sol. Il s'agit d'une limite de la loi $P_a(z) = P_a^0 e^{-\frac{z}{H_a}}$ de l'équilibre isotherme de l'atmosphère.

6.1. Comment se nomme la loi $P_a(z) = P_a^0 e^{-\frac{z}{H_a}}$ et quelles sont les deux hypothèses à partir desquelles on l'établit ?

Obtenir la loi approchée : $P_a(z) = P_a^0 \left(1 - \frac{z}{H_a}\right)$ en précisant l'approximation effectuée.

6.2. Par analogie avec $P_a(z) = P_a^0 \left(1 - \frac{z}{H_a}\right)$ donner l'expression approchée de la pression partielle

de la vapeur d'eau $P_e(z)$ en fonction de z , e_0 , P_s^0 et $H_e = \frac{RT_0}{M_e g}$ tant qu'il n'y a pas liquéfaction de la

vapeur d'eau. Montrer alors que $\ln P_a(z) \approx \ln(e_0) + \ln(P_s^0) - \frac{z}{H_e}$.

6.3. Montrer que la température de la bulle qui évolue isentropiquement et en équilibre mécanique avec l'atmosphère isotherme vérifie la loi approchée : $T(z) = T_0 [1 - \alpha z]$ où α est une constante à exprimer en fonction de γ et H_a . On partira de la loi $T^\gamma P_a^{1-\gamma} = T_0^\gamma P_a^0{}^{1-\gamma}$ que l'on justifiera puis on effectuera un développement limité.

6.4. On rappelle que selon la loi de Rankine : $\ln P_s = A - \frac{B}{T}$ avec $A = 13,28$ et $B = 4952 \text{ K}$ et P_s en bars et T en K. En remplaçant $T(z)$ par son expression dans la bulle et en effectuant un développement limité exprimer $\ln P_s(z)$ dans la bulle en fonction de A, B, T_0, z et α . En déduire $\ln P_s^0$ dans la bulle.

6.5. Exprimer $\ln P_e(z)$ dans la bulle en fonction de $A, B, T_0, \ln(e_0), z$ et H_e

6.6. A la limite de condensation dans la bulle : $P_e(z) = P_s(z)$ donc $\ln P_e(z) = \ln P_s(z)$

En déduire l'altitude à laquelle il y aura formation d'eau liquide dans la bulle et donc de nuages.

On posera $\delta = \frac{M_e}{M_a} = \frac{H_a}{H_e}$.

6.7. La valeur de z trouvée à la question précédente étant de l'ordre de 500m, l'approximation faite à la question 6.1 est-elle satisfaisante ?

7. Discussion physique sans modélisation mathématique : croissance d'une goutte d'eau par liquéfaction de la vapeur d'eau sursaturée présente dans l'air

Lorsqu'une petite goutte d'eau microscopique croît par liquéfaction de la vapeur sursaturée présente dans l'air autour d'elle, quels phénomènes doit-on prendre en compte ?

On listera les inconnues qui caractérisent l'air autour de la goutte en formation et qui se rajoutent à l'inconnue masse de la goutte. Combien d'équations sont nécessaires ? On attend une description qualitative en quelques phrases ; les principes physiques qui permettent d'établir les équations du modèle doivent être donnés mais les équations n'ont pas à être posées.

Pourquoi le processus devient-il de moins en moins efficace ?

8. Analyse de document : croissance d'une goutte d'eau par accrétion

Lire le document suivant et répondre aux trois questions ci-après.

Document :

Une goutte d'eau de masse volumique ρ_0 tombe verticalement à travers un nuage formé de fines gouttelettes en suspension. La masse volumique moyenne du nuage est notée ρ . On suppose que les gouttelettes sont initialement immobiles dans le référentiel d'étude, et qu'elles sont absorbées par la goutte lorsque celle-ci vient à leur rencontre. La seule force extérieure prise en compte est la force de pesanteur et on admettra que la goutte est et reste sphérique. On prendra un axe vertical descendant. (Figure 5). A l'instant initial $t = 0$ la goutte est à l'origine O de l'axe, avec une vitesse nulle et un rayon r_0 .

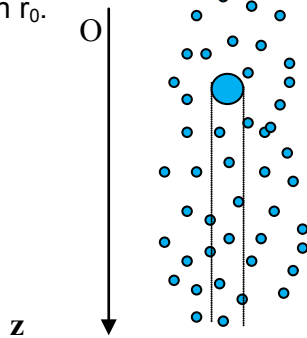


Fig. 5

Relation entre r et z :

En considérant l'accroissement de masse de la goutte dû au volume balayé par celle-ci pendant

une chute de $dz = v dt$, on montre que :
$$\frac{dr}{dt} = \frac{\rho}{4\rho_0} \frac{dz}{dt}$$

En effet pendant dt la goutte est descendue de $dz = v dt$. Elle a balayé un volume $\delta V = \pi r^2 v dt$ ce qui correspond à une masse d'eau récupérée provenant des gouttelettes du nuage égale à

$$\delta m = \rho \delta V = \rho \pi r^2 dt v \quad \text{Or } m = \rho_0 \frac{4\pi r^3}{3} \quad \text{donc } dm = \rho_0 4\pi r^2 dr$$

$$dm = \delta m \text{ donne } \rho \pi r^2 dt v = \rho_0 4\pi r^2 dr \quad \text{avec } v = dz/dt, \text{ on a bien : } \frac{dr}{dt} = \frac{\rho}{4\rho_0} \frac{dz}{dt}$$

On en déduit l'évolution du rayon r de la goutte en fonction de la distance de chute z :

$$r(t) = r_0 + \frac{\rho}{4\rho_0} z(t)$$

Obtention de l'équation du mouvement :

On souhaite ensuite établir l'équation différentielle satisfaite par $z(t)$, sans chercher à la résoudre (On laisserait cette tâche à un logiciel d'intégration numérique).

$$\text{On a : } \vec{p}(t) = m(t)\vec{v}(t) + 0 \quad \vec{p}(t + dt) = (m(t) + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) = m(t + dt)\vec{v}(t + dt)$$

$$d\vec{p} = m(t + dt)\vec{v}(t + dt) - m(t)\vec{v}(t) = d(m\vec{v}) \quad \text{soit} \quad \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\vec{g}$$

Obtention de l'équation différentielle finale :

Compte tenu de la masse de la goutte $m = \rho_0 \frac{4\pi r^3}{3}$, du fait que $v = dz/dt$ ainsi que des résultats précédents, on démontre l'équation :
$$\ddot{z} + \frac{3\dot{z}^2}{4\frac{\rho_0}{\rho}r_0 + z} = g$$

$$\text{en effet } m = \frac{4\pi r^3 \rho_0}{3} \text{ et } \frac{d(mv)}{dt} = mg \text{ alors } \frac{4\pi r^3 \rho_0}{3} \frac{dv}{dt} + v \frac{d(4\pi r^3 \rho_0)}{3 dt} = \frac{4\pi r^3 \rho_0}{3} g \text{ soit } \frac{dv}{dt} + v \frac{3}{r} \frac{dr}{dt} = g$$

$$\text{or } \frac{dr}{dt} = \frac{\rho}{4\rho_0} \frac{dz}{dt} \text{ et } v = \frac{dz}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{3}{r} \frac{\rho}{4\rho_0} \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = g \quad \text{de plus } r(t) = r_0 + \frac{\rho}{4\rho_0} z(t) \rightarrow \ddot{z} + \frac{3\dot{z}^2}{4\frac{\rho_0}{\rho}r_0 + z} = g$$

Questions :

- 8.1. Donner le principe physique qui permet d'établir l'équation du mouvement. Décrire le système sur lequel porte le principe physique.
- 8.2. Cette modélisation conduit-elle à une vitesse limite ?
- 8.3. Quel phénomène important n'est pas pris en compte dans cette modélisation ?

9. Résolution de problème : chute d'une goutte d'eau constituée

On considère la chute verticale d'une goutte d'eau constituée de masse constante de rayon constant, dans l'air uniforme et dans le champ de pesanteur terrestre uniforme \vec{g} . On oriente l'axe des \vec{z} vers le bas. Lors d'une averse, des gouttes de 3 mm de diamètre atteignent une vitesse de 8 m.s^{-1} soit environ 30 km/h. (A titre d'information il se trouve que les gouttes un peu plus grosses se fragmentent dans leur chute). On tient compte d'une force de frottement fluide laminaire du type $-\alpha\vec{v}$. Estimer l'ordre de grandeur numérique du paramètre α ainsi que l'ordre de grandeur du temps nécessaire pour que la goutte atteigne sa vitesse limite. D'autres modèles sont-ils possibles ou souhaitables ?

10. Arc en ciel

Lorsqu'un rayon lumineux incident rencontre une goutte de pluie sphérique avec un angle i par rapport à la normale, l'angle de réfraction r est donné par les lois de Descartes avec $n_e=1,33$ l'indice de l'eau et $n_{\text{air}}=1$ l'indice de l'air. On considère que, après la réfraction air-eau, le rayon se réfléchit une fois à l'intérieur de la goutte avant de se réfracter une seconde fois cette fois-ci dans le sens eau-air (Figure 6). Les angles successifs sont indiqués sur la figure.

- 10.1. Pourquoi retrouve-t-on l'angle i pour la dernière réfraction ?
- 10.2. Exprimer, pour l'incidence i , l'angle de déviation totale $D(i)$ somme de trois déviations successives.
- 10.3. Pour rechercher la direction dans laquelle la lumière est concentrée, on s'intéresse au minimum de déviation. Pourquoi ? Montrer qu'alors $dr/di = 1/2$.
- 10.4. Déterminer $\sin^2 i$ en fonction de n_e , i étant l'angle que fait au minimum de déviation le rayon incident avec la normale à la goutte. On devra pour cela différencier la loi de Descartes par rapport à la variable i .
- 10.5. Pourquoi les couleurs apparaissent-elles ?

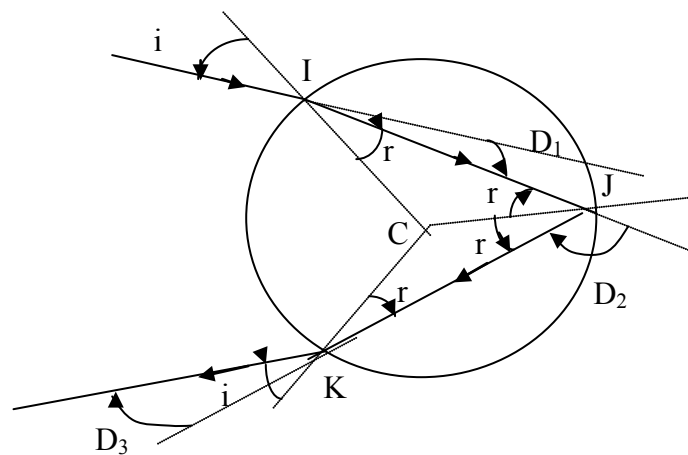


Fig. 6