Épreuve de Mathématiques 1 PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1.

1. <u>Question de cours</u> : Rappeler sans démonstration pour quelles valeurs du réel α la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

2.1. On pose pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $s_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n+p}$

Vérifier que la suite $(s_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et divergente.

2.2. Montrer qu'il existe au moins un entier naturel p tel que l'on ait : $\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n+p} > 1.$

On note alors $a_n = n + p_n$ où p_n est le plus petit entier p vérifiant cette propriété et on pose : $u_n = \frac{a_n}{n}$.

On a donc : $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{a_n} > 1.$

3. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?

4. Prouver pour $n \geqslant 2$ que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n-1} < 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{3n-2} > 1$$

5. Montrer que si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ, alors $\ell \in [2, 3]$.

6. Prouver que l'on a, pour tout entier naturel non nul n : $1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{a_n} \leqslant 1 + \frac{1}{a_n}$.

7. Démontrer que l'on a, pour tout entier naturel non nul n : $1 - \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{a_n} \leqslant \int_n^{a_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{a_n - 1} \leqslant 1.$

8. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 2.

Soint $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ muni de sa base canonique $\mathscr{B} = (1, X, X^2, ..., X^{2n})$ et a un réel.

On considère l'application Φ_a définie sur E par :

$$\forall\, P \in E, \quad \Phi_a(P) = \left(\frac{1}{4} - X^2\right) P' + a\, X\, P$$

1. Déterminer toutes les valeurs du réel a pour lesquelles Φ_a est un endomorphisme de E.

Désormais a est choisi de sorte que Φ_a est un endomorphisme de E.

2. Soit $\lambda \in [\![-n, n]\!]$.

Déterminer α et β dans $\mathbb{N}$ de sorte que le polynôme $P = \left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha \left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta$ vérifie $\Phi_a(P) = \lambda\, P$.

3. Déterminer alors les éléments propres de l'endomorphisme Φ_a.

On donnera pour chaque sous-espace propre une famille de polynômes constituant une base de ce sous-espace.

4. Déterminer une matrice B dont le spectre est $[\![0, 2n]\!]$ et dont les coefficients diagonaux sont tous égaux.

5. Expliquer comment construire à l'aide de Φ_a, un endomorphisme Ψ de E admettant $0, 1, 4, 9, ..., 4n^2$ comme valeurs propres.

Exercice 3.

Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = u_n$.

1. Soit Φ l'application qui à tout élément u de $\mathcal{E}$ associe le triplet (u_0, u_1, u_2) de $\mathbb{R}^3$.

1.1. Prouver que Φ est une bijection de $\mathcal{E}$ vers $\mathbb{R}^3$.

1.2. En déduire la dimension de l'espace $\mathcal{E}$.

2. On note alors pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, $\varepsilon_i = \Phi^{-1}(e_i)$ où (e_1, e_2, e_3) désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2.1. Justifier que $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathcal{E}$.

2.2. Déterminer explicitement les suites $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

3. Pour tout couple (u, v) d'éléments de $\mathcal{E}^2$, on pose : $(u|v) = \displaystyle\sum_{i=0}^{2} u_i\, v_i$.

Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{E}$. On notera $\|\ \|$ sa norme associée.

4. Vérifier que la base $\mathscr{B}$ est une base orthonormale de $\mathcal{E}$.

5. On définit l'application d sur $\mathcal{E}$ par :

$$\forall\, u \in \mathcal{E},\quad d(u) = w \quad \text{avec}\quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ w_n = u_{n+1}$$

5.1. Vérifier que d est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

5.2. Ecrire la matrice de l'endomorphisme d dans la base $\mathscr{B}$ de $\mathcal{E}$.

5.3. L'endomorphisme d est-il diagonalisable ?

5.4. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des vecteurs de $\mathcal{E}$ invariants par d.

5.5. Prouver que d est une isométrie de $\mathcal{E}$. Déterminer d^3.

5.6. Soit H l'orthogonal de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{E}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ stable par d.

5.7. Reconnaître la nature géométrique de la restriction de d à H et préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 4.

1. <u>**Question de cours 1**</u> : Rappeler sans démonstration le développement en série entière de $\exp(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$ et donner son rayon de convergence.

2. **<u>Question de cours 2</u>** : Soit $p \in \mathbb{N}$. Prouver que si deux matrices carrées M et N de taille d sont semblables, alors les matrices M^p et N^p sont semblables.

Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, on pose, lorsque cela est possible, $\varphi(A) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} = \lim_{m \to +\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}$.

3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $s(z) = \dfrac{1}{2i} [\exp(iz) - \exp(-iz)]$ et $c(z) = \dfrac{1}{2} [\exp(iz) + \exp(-iz)]$ où i vérifie $i^2 = -1$.

3.1. Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $s(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$.

3.2. Déterminer une formule analogue pour $c(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

4. Si $A = \gamma I_2$ avec $\gamma \in \mathbb{C}$, déterminer $\varphi(A)$.

5. **On suppose que A possède deux valeurs propres distinctes α et β.**

5.1. Justifier l'existence d'une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que : $B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = P^{-1} A P$.

5.2. Déterminer $\varphi(B)$ puis $\varphi(A)$ à l'aide de la matrice P.

6. **On suppose que les valeurs propres de A sont égales : $\beta = \alpha$.**

6.1. Justifier l'existence d'une matrice $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et d'un nombre complexe y tels que : $C = \begin{pmatrix} \alpha & y \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = Q^{-1} A Q$.

6.2. Calculer C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6.3. En déduire $\varphi(A)$ à l'aide de la matrice Q.

7. Justifier l'existence de $\varphi(A)$ pour toute matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

8. Existe-t-il une matrice X de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telle que l'on ait : $\varphi(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

FIN DE L'ÉPREUVE

IMPRIMERIE NATIONALE – 19 1115 – D'après documents fournis